

EUZET

**Sur les courbes planes à équations trinômes
et les surfaces à équations tétranômes**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13
(1854), p. 193-200

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__193_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES COURBES PLANES A ÉQUATIONS TRINOMES ET LES
SURFACES A ÉQUATIONS TÉTRANOMES;**

D'APRÈS M. EUZET

(Au bureau du Génie, à Toulon).

En juin 1853, M. Euzet a publié, à Toulon, une feuille lithographiée, contenant plusieurs beaux théorèmes très-généraux, énoncés sans démonstrations, attendu, dit l'auteur, qu'elles sont trop étendues pour un opuscule et trop élémentaires. Nous allons indiquer ces théorèmes, sans toutefois conserver l'ordre adopté par l'auteur, et y ajouter quelques démonstrations, qui sont, en effet, très-faciles.

1. Soit

$$(1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$$

l'équation d'une courbe à axes quelconques; a , b , m , n sont des nombres donnés, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

Soit encore l'équation d'une droite

$$\frac{nt}{mx} + \frac{mu}{ny} = 1;$$

t et u sont des coordonnées courantes; x et y des coordonnées d'un point situé sur la courbe (1). Pour trouver l'équation de l'enveloppe de cette droite, on pose, comme on sait, les trois équations

$$\begin{aligned} m^2 xu + n y t &= mn x, \\ m^2 a^m y^n u - n b^{n-1} x^{n-1} t &= mn (a^m y^n - b^n x^m), \\ b^n x^m + a^m y^n &= a^m b^n. \end{aligned}$$

C'est entre ces trois équations qu'il faut éliminer x et y ; les deux premières équations linéaires en u et t donnent

$$u = \frac{n}{mb^n} x^{n+1}, \quad t = \frac{m}{na^m} x^{n+1};$$

substituant les valeurs de x , y en t et u dans la troisième équation, on obtient

$$\frac{\frac{n}{mb^n} x^{n+1}}{\left(\frac{n}{m} b\right)^{\frac{n}{n+1}}} + \frac{\frac{m}{na^m} x^{n+1}}{\left(\frac{m}{n} a\right)^{\frac{m}{m+1}}} = 1;$$

c'est l'équation de l'enveloppe, et que l'auteur désigne sous le nom de *première conjuguée* de la courbe (1).

(195)

Cette équation a la même forme que l'équation (1); en y opérant de la même manière, on obtient la deuxième conjuguée de l'équation (1), et ainsi de suite. Pour avoir la conjuguée de l'ordre k , posons

$$b_k = \left(\frac{n}{m}\right)^k \frac{(m+1)(2m+1)}{(n+1)(2n+1)} \dots \frac{[(k-1)m+1]}{[(k-1)n+1]} b,$$
$$a_k = \left(\frac{m}{n}\right)^k \frac{(n+1)(2n+1)}{(m+1)(2m+1)} \dots \frac{(kn+1)}{(km+1)} a;$$

on obtient pour équation de cette conjuguée .

$$\left(\frac{u}{b_k}\right)^{\frac{n}{1+nk}} + \left(\frac{t}{a_k}\right)^{\frac{m}{1+mk}} = 1,$$

lorsque $m = n$; cette équation devient

$$\left(\frac{u}{b}\right)^{\frac{n}{1+nk}} + \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{m}{1+mk}} = 1,$$

c'est le *premier théorème général* de M. Euzet.

Dans la supposition de $m = n$, si par un point de la courbe donnée on mène des parallèles aux axes, on obtient un parallélogramme; l'enveloppe de la diagonale qui part des axes est alors la première conjuguée.

2. Soit x_1, y_1 un point pris sur la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1,$$

et t_1, u_1 le point correspondant sur la première conjuguée; menons par ces deux points des tangentes aux courbes respectives. Soient T l'aire formée par la première tangente et les axes; T₁ l'aire formée par la seconde tan-

(196)

gente et les axes. On a la relation

$$T.T_1^{n-1} = \left(\frac{ab}{2}\right)^n.$$

3. LEMME.

$$\begin{aligned} & \int x^{m-1} dx (a + bx^n)^\frac{\mu}{\nu} + 1 \\ &= \frac{\nu x^m (a + bx^n)^\frac{\mu}{\nu} + 1}{m\nu + n(\mu + \nu)} + \frac{n(\mu + \nu)a}{m\nu + n(\mu + \nu)} \int x^{m-1} dx (a + bx^n)^\frac{\mu}{\nu}, \\ & \int x^{m+n-1} dx (a + bx^n)^\frac{\mu}{\nu} \\ &= \frac{\nu x^m (a + bx^n)^\frac{\mu}{\nu} + 1}{(m\nu + n\mu + n\nu)b} - \frac{m\nu a}{(m\nu + n\mu + n\nu)b} \int x^{m-1} dx (a + bx^n)^\frac{\mu}{\nu}; \end{aligned}$$

faisons

$$p = \left(-\frac{a}{b}\right)^\frac{1}{n},$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_0^p x^{m-1} dx (a + bx^n)^\frac{\mu}{\nu} + 1 \\ &= \frac{n(\mu + \nu)a}{m\nu + n(\mu + \nu)} \int_0^p x^{m-1} dx (a + bx^n)^\frac{\mu}{\nu}, \\ & \int_0^p x^{m+n-1} dx (a + bx^n)^\frac{\mu}{\nu} \\ &= -\frac{m\nu a}{(m\nu + n\mu + n\nu)b} \int_0^p x^{m-1} dx (a + bx^n)^\frac{\mu}{\nu}. \end{aligned}$$

4. Soient

$$S = \int_0^a y \, dx, \quad S_1 = \int_0^{a_1} u \, dt,$$

$$S = \int_0^a dx \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^m \right]^{\frac{1}{n}} = a \int_0^1 dz (1 - z^m)^{\frac{1}{n}};$$

ou

$$x = az,$$

$$S_1 = \int_0^{a_1} dt \left[1 - \left(\frac{t}{a_1} \right)^{m_1} \right]^{\frac{1}{n_1}};$$

ou

$$m_1 = \frac{m}{1+m}, \quad n_1 = \frac{n}{1+n};$$

faisons $t = a_1 z_1$, ou a

$$S_1 = a_1 \int_0^1 dz_1 (1 - z_1^{m_1})^{1 + \frac{1}{n}},$$

or, d'après le lemme,

$$S_1 = \frac{a_1 m_1 (1+n)}{n + m_1 (1+n)} \int_0^1 dz_1 (1 - z_1^{m_1})^{\frac{1}{n}} = p \int_0^1 dz (1 - z^{m_1})^{\frac{1}{n}}.$$

Posons

$$z^{m_1} = z^{1+m} = v^m, \quad z = v^{1+m};$$

d'où

$$S_1 = p(1+m) \int_0^1 v^m \, dv (1 - v^m)^{\frac{1}{n}},$$

et, d'après le lemme,

$$S_1 = \frac{p(1+m)n}{n+m+mn} \int_0^1 dv (1 - v^m)^{\frac{1}{n}};$$

donc

$$\frac{S_1}{S} = \frac{p(1+m)n}{(m+n+mn)a} = \frac{m}{n} \cdot \frac{mn \cdot 1 + m \cdot 1 + n}{(m+n+mn)(m+n+2mn)}.$$

Faisant $m = n$, on a

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+n}{2+n},$$

et de là

$$\frac{S_k}{S} = \frac{1}{2^k} \frac{(1+n)(1+2n)(1+3n) \dots (1+kn)}{(2+n)(2+3n) \dots [(2+(2k-1)n)]};$$

S est l'aire de la courbe donnée comprise entre les axes et S_k l'aire analogue de la courbe conjuguée d'ordre k . C'est le *deuxième théorème général* de M. Euzet, en supposant $m = n$ et que les courbes rencontrent les axes.

EXEMPLES. — Faisons $m = n = 1$; la ligne donnée est une droite; la première conjuguée est une parabole ayant pour équation

$$\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{S_1}{S} = \frac{1}{3}.$$

Si $m = n = 2$,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

on a pour équation de la première conjuguée

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad S_1 = \frac{3}{8} \pi ab;$$

L'équation de la développée est

$$\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{q}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad p = \frac{a^2 - b}{a}, \quad q = \frac{a^2 - b^2}{b};$$

d'où l'on déduit, pour l'aire de la développée,

$$\frac{3}{8} \pi \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right)^2.$$

4. *Troisième théorème général.* Les axes étant rectangulaires et $m = n$, si l'on fait tourner autour de l'un d'eux, comme charnière, le plan qui renferme la courbe (1) ainsi que sa $k^{i\text{ème}}$ conjuguée, en nommant V et V_k les volumes respectifs engendrés par ces lignes, on trouve

$$V_k = \frac{(1+n)(1+2n)\dots(1+kn)(2+n)(2+2n)\dots(2+2kn)}{(3+n)(3+2n)\dots(3+3kn)} V.$$

Démonstration. Au moyen des lemmes, on suppose $m = n$; les courbes engendrent des cônes. Si $n = 1$, on a

$$V_1 = \frac{V}{5}.$$

5. Nous omettons le quatrième théorème, cas particulier du suivant.

Cinquième théorème général. Soit

$$(1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^{n'} + \left(\frac{z}{c}\right)^{n''} = 1$$

l'équation d'une surface.

Faisant

$$x^{kn+1} = a^{kn} x', \quad y^{k'n'+1} = b^{k'n'} y', \quad z^{k''n''+1} = c^{k''n''} z',$$

la surface dérivée a pour équation, ôtant les accents,

$$(1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{1+nk}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n'}{1+n'k'}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{n''}{1+n''k''}} = 1;$$

et, en représentant par V_1 , V_2 , les volumes respectifs compris entre ces surfaces et les plans coordonnés, et posant

$$\begin{aligned}
 (1+n)(1+2n)\dots(1+kn) &= P_n, \\
 (1+n')(1+2n')\dots(1+k'n') &= P_{n'}, \\
 (1+n'')(1+2n'')\dots(1+k''n'') &= P_{n''}, \\
 nn' + n'n'' + n''n &= N, \\
 (N + nn'n'')(N + 2nn'n'')\dots[N + (k + k' + k'')nn'n''] &= M,
 \end{aligned}$$

on a

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(nn')^{k''} (n'n'')^k (n''n)^{k'}}{M} P_n P_{n'} P_{n''}.$$

L'auteur nous a adressé la démonstration fondée sur les formules connues pour les volumes.

Note. Lorsque $n = n' = n''$, on a les surfaces étudiées par M. Lamé en 1818, alors élève ingénieur des Mines, dans l'ouvrage intitulé : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie.* Paris, in-8 de 124 pages. Ouvrage très-rare qui fait époque, étant le point de départ des méthodes métamorphiques aujourd'hui si en vogue.