Sur le problème du cavalier au jeu des échecs

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 181-188
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__181_1>

SUR LE PROBLÈME DU CAVALIER AU JEU DES ÉCHECS;

PAR UN ABONNÉ.

On connaît le problème auquel a donné naissance la convention faite relativement à la marche du cavalier au jeu des échecs. Il s'agit, dans ce problème, de faire occuper successivement et une seule fois, par le cavalier, chacune des soixante-quatre cases de l'échiquier, de manière à pouvoir revenir, si l'on veut, de la dernière case à celle qui a servi de point de départ. Ce problème, dont plusieurs géomètres se sont occupés, n'a aucune difficulté; mais la détermination du nombre de solutions distinctes qu'il peut admettre, constitue un nouveau problème d'un ordre plus élevé et que nous étudierons dans un autre article. Nous nous bornerons ici à indiquer la manière dont on peut obtenir les diverses solutions du problème du cavalier. Legendre a traité cette question dans le second volume de sa *Théorie des nombres* (3e édition); mais ce qu'il a dit à ce sujet n'est pas suffisant.

Plaçons le cavalier à une case quelconque où nous écrivons le nombre 1, puis faisons-le marcher conformément à la règle du jeu, arbitrairement d'ailleurs, en ayant soin d'écrire les nombres 2, 3, 4, etc., dans les cases qui sont ainsi successivement occupées, et de ne point revenir à une case déjà marquée. Il pourra arriver, par hasard, qu'en opérant de la sorte, on passe par chacune des 64 cases, lesquelles seront ainsi désignées par les nombres 1, 2,..., 64; mais, le plus souvent, on sera arrêté avant d'avoir épuisé toutes les cases, la dernière de celles où l'on est entré ne correspondant qu'avec des cases déjà marquées. Nous disons que deux cases se correspondent lorsqu'on peut aller directement de l'une à l'autre, d'après la règle du jeu. Dans tous les cas, si les cases marquées de numéros impairs sont blanches, les cases marquées de numéros pairs seront noires, ou réciproquement.

Supposons que n cases aient été marquées par les nombres

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n,$$

et écrivons des lettres quelconques A, B, C,... dans les cases non marquées. Nous allons montrer comment on peut successivement faire entrer, dans le circuit des n premières cases, chacune des cases restantes.

Remarquons d'abord que le circuit $1.2\ldots n$ peut être changé d'un très-grand nombre de manières diverses.

Soit, par exemple, n_0 l'une des cases qui correspondent à n, notre circuit pourra être remplacé par le suivant :

$$1.2\ldots n_0 \mid n(n-1)\ldots(n_0+1).$$

Soit, de même, n_1 l'une des cases qui correspondent à 1, le circuit $1.2\ldots n$ pourra être remplacé par

$$(n_1-1)\ldots 2.1 \mid n_1(n_1+1)\ldots n.$$

On voit qu'on peut toujours changer en une autre, l'une quelconque des deux cases extrêmes du circuit primitif, et cela de plusieurs manières; car, après avoir fait ce changement une fois, on peut encore faire un nouveau changement, et ainsi de suite.

Pour l'objet que nous avons en vue, il faut diriger l'opération du changement de circuit de manière que l'une des cases extrêmes du nouveau circuit corresponde avec l'une des cases que l'on veut introduire, et alors cette introduction se fera immédiatement; par exemple, si l'on a remplacé le circuit $1.2\ldots n$ par

$$1\ldots n_0 \mid n\ldots\ (n_0+1),$$

et que n_0+1 corresponde avec A, on aura le circuit

$$1\ldots n_0 \mid n\ldots(n_0+1) \mid A,$$

qui comprend la case A. Par cette méthode, on pourra toujours, après quelques tâtonnements, introduire successivement et une à une toutes les cases marquées des lettres A, B, C,.... On pourrait croire qu'il faille changer le numérotage après chaque introduction; mais cela n'est pas nécessaire, et avec un peu d'attention on pourra opérer comme si ce changement avait été effectué.

La méthode précédente est générale, mais il se présente des cas où l'on peut l'éviter et opérer plus simplement. Par exemple, si les deux cases A et B se correspondent et qu'elles correspondent respectivement avec les cases n_0 et $n_0 + 1$ du circuit, les cases A et B s'introduisent immédiatement; on a, en effet, le circuit

$$1 \ldots n_0 \,|\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \,|\, (n_0 + 1) \ldots n;$$

on pourra de la même manière faire entrer en même temps dans le circuit plusieurs cases A, B, C,..., L qui formeraient entre elles un circuit dont les extrêmes correspondraient à deux cases successives n_0 et $n_0 + 1$.

En opérant comme il vient d'être expliqué, on obtiendra un circuit complet, renfermant les 64 cases; mais, en général, ce circuit ne sera pas *rentrant*, c'est-à-dire que la dernière case ne correspondra pas avec la première. Or il est très-aisé de faire *rentrer* un circuit non rentrant. Supposons que les 64 cases, dans l'ordre où elles sont occupées, soient marquées des nombres

$$1, 2, 3, \ldots, 64.$$

La question que nous nous proposons se résout immédiatement, dans le cas où il existe deux cases successives m et $m + 1$ qui correspondent, la première avec 64, la seconde avec 1. On a, en effet, ce nouveau circuit qui est rentrant, savoir :

$$1.2.3.. \; m \,|\, 64.63 \ldots (m + 1).$$

Le cas où il n'existe pas deux cases m et $m + 1$ qui correspondent avec 64 et 1 respectivement, se ramène toujours au premier cas en changeant le circuit d'une manière convenable, comme il a été indiqué plus haut.

Ce n'est que quand le circuit est rentrant que le problème du cavalier est complétement résolu; on peut alors partir d'une case quelconque. Supposons, par exemple, qu'on ait un circuit rentrant dont les cases successives soient marquées

$$1.2.3 \ldots 64;$$

si l'on veut partir de la case 26, il faudra marcher dans l'ordre suivant :

26... 64 | 1...25.

Exemple. En opérant comme il a été indiqué plus haut, je remplis 60 cases que je marque 1.2... 60, je désigne les 4 cases restantes par A, B, C, D, j'ai le tableau suivant :

1	24	51	36	11	22	49	34
52	37	12	23	50	35	10	21
13	2	25	56	C	B	33	48
26	53	38	41	60	57	20	9
3	14	55	58	A	40	47	32
54	27	42	39	D	59	8	19
15	4	29	44	17	6	31	46
28	43	16	5	30	45	18	7

Les cases A et B se correspondent, de plus A correspond avec 20 et B avec 21 ; on peut donc immédiatement introduire A et B, et l'on a le circuit

1... 20 | A.B | 21... 60.

En deuxième lieu, C correspond avec 36, et 60 correspond avec 35 ; cela permet d'introduire C, et l'on a le nouveau circuit

1... 20 | A.B | 21... 35 | 60... 36 | C.

En troisième lieu, D correspond avec 57, et C correspond avec 58; cela permet d'introduire D, et l'on a le nouveau circuit qui embrasse toutes les cases, savoir :

1... 20 | A.B | 21...35 | 60...58 | C | 36...57 | D.

Pour rendre ce circuit rentrant, changeons-le d'abord dans le suivant, en se servant de ce que D correspond avec 55,

1... 20 | A.B | 21...35 | 60... 58 | C | 36...55 | D | 57.56;

remarquant ensuite que 1 et 56 correspondent respectivement avec 12 et 11, on obtient le circuit suivant, qui est rentrant :

1...11 | 56.57 | D | 55... 36 | C | 58...60 | 35... 21 | B.A | 20...12.

Et, si l'on numérote ces mêmes cases de 1 à 64, dans l'ordre qu'on doit suivre, le premier tableau se change dans le suivant :

1	50	19	34	11	52	21	40
18	33	64	51	20	39	10	53
63	2	49	12	35	54	41	22
48	17	32	29	38	13	56	9
3	62	15	36	55	30	23	42
16	47	28	31	14	37	8	57
61	4	45	26	59	6	43	24
46	27	60	5	44	25	58	7

La considération des échiquiers d'un nombre quelconque *mn* de cases conduit à des remarques curieuses que nous pourrons développer plus tard.

Note du Rédacteur. C'est Euler qui, le premier, a ramené ce problème de situation à un *tâtonnement rationnel* (Académie de Berlin, 1759); à l'aide d'une notation ingénieuse, Vandermonde a appliqué ce procédé à un échiquier quelconque de mn cases; même à un échiquier *solide* (Académie de Paris, 1771), et récemment, un géomètre s'en est occupé dans un journal anglais (Rev. Moon, *On the knights move at chess, Cambridge and Dublin mathematiques Journal*, 1e série, vol. III, p. 333, 1re édit.). Un ouvrage très-curieux et très-ingénieux est celui du chevalier Ciccolini, *del cavallo degli scacchi*, Paris, 1826 : on y résout le problème même pour des échiquiers *circulaires*. La solution rigoureuse, et par conséquent celle qui concerne le nombre des solutions, est encore à trouver. C'est que les principes de la géométrie de situation désirés par Leibnitz sont toujours inconnus; principes intimement liés à la théorie combinatoire des nombres et au calcul aux différences partielles finies. C'est ainsi que les questions 151, 152 (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 114) sur les échecs et le domino, qui résistent aux efforts d'excellents géomètres, sont des questions combinatoires, les combinaisons étant soumises à certaines lois. Le problème sur le nombre de chemins différents qui peuvent amener une tour d'une case donnée à une autre case donnée, a été résolu rigoureusement, je crois, par Charles (*) à l'aide de l'intégration d'une équation aux différences finies. Je ne sache pas qu'on se soit occupé du même problème pour le fou.

L'ouvrage imprimé le plus ancien sur le jeu des échecs est, je crois, celui de Damiano, qui a paru à Rome, en

---

(*) Dans la Biographie Michaud, on a fait de ce Charles le géomètre et de Charles le physicien un seul et même homme; où trouve-t-on des *renseignements sur le géomètre ?*

italien et en espagnol, en 1512 (*Libro imparare giuocase*). On lui attribue le coup du gambit (*gambetta*, croc-en-jambe) qui consiste à sacrifier au troisième coup le cavalier du roi pour amener une belle attaque. On croit que l'auteur le plus ancien sur le jeu des échecs est Jacobus de Césolis, né à Césole, en Picardie, au XIII^e siècle.