TURQUAN

Sur la division abrégée et la division ordonnée

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 170-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__170_1>

SUR LA DIVISION ABRÉGÉE ET LA DIVISION ORDONNÉE (*);

PAR M. TURQUAN,

Agrégé des Sciences mathématiques.

1°. PRINCIPE FONDAMENTAL. — *Si l'on a à effectuer une division dont le quotient n'ait qu'un seul chiffre, qu'on supprime le même nombre de chiffres à la droite du dividende et du diviseur, et qu'on divise l'un par l'autre le dividende et le diviseur ainsi restreints; si le reste de cette division est plus grand que le chiffre du quotient, ce quotient sera celui de la division proposée.*

Par exemple, soit à diviser 464 936 758 par 84 783 639. Supprimons cinq chiffres à droite du dividende et du diviseur, et divisons 4649 par 847, ce qui nous donnera pour quotient 5 et pour reste 414. Je dis que 5 est le quotient de la division proposée.

En effet, ce chiffre 5 indique combien de fois 847 est contenu dans 4649, et, par suite, combien de fois 84 700 000 est contenu dans 464 900 000, ou bien encore combien de fois 84 700 000 est contenu dans 464 936 758; donc 5 peut être trop fort, mais pas trop faible. Il ne peut pas non plus être trop fort, car, si cela était, on aurait

$$464\,936\,758 < 5 \times 84\,783\,639,$$

(*) Voir tome III, pages 328, 658; tome V, pages 244, 250, 460, 599, 629; tome VI, page 425; tome XI, pages 53, 100, 148.

et, à fortiori,

$$464\,900\,000 < 5 \times 84\,800\,000,$$

ou

$$4\,649 < 5 \times 848.$$

Mais on a

$$4\,649 > 5 \times 847;$$

donc 4 649 est compris entre 5.847 et 5.848; la différence entre 4 649 et 5.847 serait donc moindre que 5, ce qui n'a pas lieu.

Le principe énoncé se trouve donc démontré : voyons comment nous pourrons nous en servir pour abréger la division.

2°. Soit à diviser 4 649 367 587 par 847 836. Le quotient aura quatre chiffres. Je prends sur la gauche du diviseur cinq chiffres, autant plus un qu'il y en a au quotient, savoir 84783, et sur la gauche du dividende assez de chiffres pour contenir le diviseur conservé 84 783, et le contenir moins de dix fois, savoir 464 936; et je divise ensuite ces six premiers chiffres du dividende par les cinq premiers chiffres du diviseur. Je trouve pour quotient 5.

4 649 36$\overline{7\ 587}$	84$\cancel{7}$ 83$\bar{6}$
41 018	5483
7 105	
3 23	
69	

Je multiplie 84783 par 5, en ayant soin d'augmenter le produit des dizaines qui proviennent de la multiplication du chiffre barré 6 du diviseur par 5. Je soustrais le produit du dividende 464 936, et je trouve pour reste 41 018. Ce reste est évidemment plus petit que celui de la division de 464 936 par 84 783, puisqu'on a mis 18 pour le produit de 3.5, et comme il est aussi plus grand que 5, ce chiffre 5, en vertu de notre principe fondamental, est le quotient des sept premiers chiffres du dividende par le diviseur, et, par conséquent, le premier chiffre de la division proposée.

Ce reste 41 018 se compose des cinq premiers chiffres du second dividende partiel que donnerait la division ordinaire, sauf une erreur en plus qui vient de ce qu'on n'a pas soustrait les unités provenant du produit du premier chiffre barré 6 par le chiffre 5, erreur qui ne peut pas surpasser deux unités (*). Par conséquent, si l'on divise 41 018 par les quatre premiers chiffres du diviseur, et si le quotient trouvé est plus petit que le reste correspondant diminué de 2, ce quotient sera le second chiffre du quotient de la division proposée. Je barre donc le chiffre 3, je divise 41 018 par 8 478, ce qui me donne pour quotient 4; je multiplie 8 478 par 4, j'ajoute au produit les dizaines provenant de la multiplication du dernier chiffre barré 3 par 4, je soustrais de 41 018; le reste 7 105 est plus petit que le reste de la division de 41 018 par 8478, et, diminué de 2, il est encore plus grand que 4. Donc 4 est le second chiffre cherché.

Le reste 7105 se compose des quatre premiers chiffres du troisième dividende partiel que donnerait la division ordinaire, sauf une erreur en plus de quatre unités, parce que le reste précédent 41 018 peut être lui-même trop fort de deux unités, et parce que le défaut de soustraction des unités de mille provenant de la multiplication des parties négligées du diviseur par 400 peut encore amener deux unités d'erreur. Par conséquent, si l'on divise 7 105 par les trois premiers chiffres du diviseur, et si le quotient trouvé est plus petit que le reste correspondant diminué de quatre unités, ce quotient sera le troisième chiffre du quotient de la division proposée. Je barre donc le chiffre 8, je divise 7 105 par 847, ce qui me donne pour quotient 8; je multiplie 847 par 7, j'ajoute au produit les dizaines provenant de la multiplication du dernier

(*) *Voir* la remarque, page 174.

chiffre barré 8 par le quotient 8, je soustrais de 7105. Le reste 323 est plus petit que le reste de la division de 7105 par 847, et, diminué de 4, il est encore plus grand que 8. Donc 8 est le troisième chiffre cherché.

On voit facilement que le reste 323 se compose des trois premiers chiffres du quatrième dividende partiel que donnerait la division ordinaire, sauf une erreur en plus qui ne peut pas surpasser six unités. Par conséquent, si l'on barre le chiffre 7 et si l'on divise 323 par 84, le chiffre ainsi trouvé 3 sera le quatrième chiffre demandé, parce que le reste 69, évalué avec les précautions prises dans les opérations précédentes, est plus petit que le reste de la division de 323 par 84, et que, diminué de 6, il est encore plus grand que 3.

3°. On voit, par ce qui vient d'être dit, que :

Pour trouver le quotient d'un nombre entier par un nombre entier à une unité près, on conserve au diviseur, à partir de la gauche, autant de chiffres plus un qu'on en veut avoir au quotient; on prend sur la gauche du dividende un nombre suffisant de chiffres pour contenir la partie conservée du diviseur et pour la contenir moins de dix fois; on divise ensuite le dividende restreint par le diviseur restreint, ce qui donne le premier chiffre du quotient; on multiplie le diviseur restreint par ce chiffre, en ayant soin d'augmenter le produit des dizaines provenant de la multiplication du premier chiffre négligé du diviseur par le premier chiffre du quotient, et l'on soustrait du premier dividende partiel. On barre le dernier chiffre du diviseur, et l'on divise le reste par ce nouveau diviseur, on a ainsi le second chiffre du quotient; on multiplie le second diviseur par ce chiffre, en ayant soin d'ajouter au produit les dizaines du produit du dernier chiffre barré par le second chiffre du quotient, et l'on soustrait du premier reste. On supprime un nouveau chiffre à la droite du diviseur, et l'on a ainsi un troisième diviseur restreint par lequel on divise le second reste, et l'on obtient le troisième chiffre du quotient, et ainsi de suite.

Tant que chaque reste, diminué d'autant de fois 2 qu'on a trouvé de chiffres moins un au quotient, est plus grand que le dernier chiffre trouvé, ce chiffre est exact, et l'on a le quotient approché par défaut, à moins d'une unité de l'ordre de ce chiffre.

Comme on a pris au diviseur autant de chiffres plus un qu'il y en a au quotient, le diviseur qui donnera le chiffre des unités aura deux chiffres, et le reste correspondant en aura ordinairement deux, et sera dans la plupart des cas, même après la correction, plus grand que le dernier chiffre du quotient.

4°. *Remarque.* Il est facile de se convaincre que le défaut de soustraction des chiffres négligés de chaque produit, peut augmenter de deux unités les parties conservées des restes; car, en ajoutant au produit du dernier chiffre barré par le dernier chiffre trouvé au quotient, les dizaines provenant de la multiplication de l'avant-dernier chiffre barré, on pourrait augmenter les dizaines de ce produit d'une unité, et si les unités se trouvaient plus grandes que le chiffre correspondant du dividende partiel, et qui n'est pas écrit, ces dizaines augmenteraient d'une nouvelle unité. De sorte que ces deux unités se retrouveraient dans le reste suivant, qui serait ainsi augmenté de deux unités. L'erreur peut donc aller jusqu'à deux unités, mais il est évident qu'elle ne peut pas aller au delà.

5°. On peut facilement trouver le véritable reste de la division. Il suffit, en effet, d'écrire à côté de 69 (page 171) les chiffres négligés du dividende, et de retrancher du nombre ainsi obtenu tout ce qu'on a omis de soustraire par le procédé de la division abrégée; ce qui se compose évidemment du produit

de	6	par	5 000	moins les dizaines de mille provenant de ces différents produits.
de	36	par	400	
de	836	par	80	
de	7 836	par	3	

Désignons-les par d, d', d'', d'''; on aura

$$\begin{array}{rrl}
6 \times & 5\,000 - d = & 0000 \\
36 \times & 400 - d' = & 4\,400 \\
836 \times & 80 - d'' = & 6\,880 \\
7836 \times & 3 - d''' = & 3\,508 \\
\hline
\text{Total} \ldots\ldots\ldots\ldots & & 14\,788
\end{array}$$

on retranchera donc 14 788 de 697 587, et le résultat 682 799 sera le reste de la division.

On pourra se servir de ce reste pour trouver quatre autres chiffres du quotient par la méthode de la division abrégée.

4649 367 587	847836
410 18	5483,80534325
71 05	
3 23	
697587	
14788	
682799	
4531	
292	
320000	
13308	
366692	
27638	
2204	
509	
1	

On supprimera le dernier chiffre 6 du diviseur, et l'on divisera 682 799 par 84 783, ce qui donne pour quotient 8. On multipliera 84 783 par 8, en ayant soin d'ajouter au produit les dizaines provenant de la multiplication du chiffre négligé 6 par 8. Le reste 4 531 est plus grand que 8, donc le chiffre 8 convient. On barrera le chiffre 3 et l'on divisera 4531 par 8 478. Le quotient est zéro. On barrera alors le chiffre 8 du diviseur, et l'on divisera le même reste 4531 par 847. On trouve pour quotient 5. On multipliera 847 par 5 en ayant soin d'ajouter au produit les dizaines provenant de la multiplication du dernier chiffre barré 8 par 5, et l'on soustrait de 4531. Le reste 292, diminué de quatre unités, est plus grand que 5, donc le chiffre 5 convient. On supprime enfin le chiffre 7 du diviseur, et l'on divise 292 par 84. On trouve pour quotient 3. On multiplie 84 par 3 en ayant soin d'augmenter ce produit des dizaines provenant de la multiplication du dernier chiffre barré 7 par 3, et l'on soustrait de 292. Le reste 38, diminué de 6, étant plus grand que le chiffre 3, ce chiffre 3 convient.

On pourra ensuite retrouver le véritable reste correspondant au dernier chiffre 3 du quotient par le même procédé que nous avons suivi tout à l'heure, et ce nouveau reste permettra de trouver encore quatre autres chiffres au moyen de la division abrégée.

6°. Lorsqu'un des restes, diminué d'autant de fois 2 qu'on a déjà trouvé de chiffres moins un au quotient, est plus petit que le dernier chiffre trouvé, ce dernier chiffre est incertain, et il faut s'assurer s'il convient avant de continuer l'opération. Pour cela, on rétablira le reste suivant tel qu'il aurait été obtenu par le procédé de la division ordinaire, de la même manière que nous avons déjà rétabli le reste final de la division; et si la correction peut se faire, le chiffre convient, car le produit du diviseur par ce chiffre est plus petit que le dividende partiel qui l'a donné. Si la correction ne peut pas se faire, il faudra diminuer ce chiffre d'une unité, et recommencer la vérification.

Au lieu de rétablir le reste suivant tout entier, on pourra en rétablir une partie seulement, comme on le voit dans l'exemple suivant. Le reste correspondant au chiffre 8 trouvé au quotient est 6, plus petit que 8; ce dernier chiffre pourrait donc être trop fort. Pour s'en assurer, à

2 452 445 375	645 367
516 34	380 0
65	
14	
51	

côté du dernier reste 6 on abaissera le premier chiffre négligé du dividende; le nombre 65 ainsi obtenu contient les mille du troisième dividende partiel augmenté de tous les mille que le procédé de la division abrégée n'a pas permis de soustraire. Or ces mille sont la somme des unités du produit de 7 par 3000, des dizaines du produit de 7 par 800 et des unités du produit de 6 par 800, somme égale à 14. Comme 14 peut être retranché de 65, et que le reste 51 est plus grand que 2, le produit du diviseur par 8 est nécessairement plus petit que le second dividende partiel, et le chiffre 8 convient.

DIVISION ORDONNÉE.

7°. Il est clair qu'au lieu de chercher par le procédé abrégé de la division le nombre total des chiffres de la partie entière du quotient, on peut n'en chercher qu'un certain nombre, trois par exemple. Alors il faut commencer par diviser les cinq ou quatre premiers chiffres du dividende par les quatre premiers du diviseur. Après avoir trouvé le troisième chiffre, on rétablira les premiers chiffres du reste correspondant par un procédé semblable à celui qui nous a servi dans le paragraphe précédent, et, avec ce reste, on pourra encore trouver trois autres chiffres, etc.

On peut même ne chercher qu'un seul chiffre à la fois en divisant les trois premiers chiffres du dividende par les deux premiers du diviseur, et en rétablissant après chaque division les trois premiers chiffres du reste correspondant. Cette méthode simplifie aussi l'opération, et elle est sur tout remarquable parce qu'elle reproduit, sauf de légères modifications, la division ordonnée de Fourier.

Reprenons la même division que plus haut. Prenons pour diviseur désigné 84, et pour premier dividende partiel 464. Nous trouverons pour quotient 5 et pour reste 41 plus grand que 5; donc 5 convient. Nous écrivons à côté du reste le chiffre 9; le nombre 419 surpasse les unités du septième ordre du second dividende partiel ordinaire de toutes les unités du septième ordre provenant de la multiplication des 7 mille du diviseur par les 5 mille du quotient et de celles provenant du produit des 8 centaines du diviseur par 5000. Ce nombre d'unités du septième ordre s'élève à 9. Je soustrais 9 de 419, et le reste 410, sauf une erreur en plus qui ne peut surpasser deux unités, se compose des millions du second dividende partiel. Je divise 410 par 84, je trouve pour quotient 4 et pour reste 72; 72, diminué de 2, est plus grand que 4, donc 4 convient. A côté de 72, j'écris 3; 723 surpasse les unités du sixième ordre provenant de la multiplication des 3 dizaines et des 8 centaines du diviseur par 5000, et de la multiplication des 8 centaines et des 7000 du diviseur par 400, donc la somme s'élève à 12. Je soustrais 12 de 723, et le reste

```
4 649 367 587 | 847 836
  419         | 5483,8053
    9
  410
   723
    12
   711
    346
     23
    323
     697
      13
     684
       75
       28
      478
       24
      454
       317
        25
       292
        380
         12
        ....
```

711, sauf une erreur en plus qui ne peut surpasser deux unités, contient toutes les centaines de mille du troisième dividende partiel ordinaire. Je divise 711 par 84, je trouve pour quotient 8 et pour reste 34; 34, diminué de 2, est plus grand que 8, donc le chiffre 8 convient. A côté de 34, j'abaisse le chiffre 6, et le nombre 346 surpassera les dizaines de mille du quatrième dividende partiel ordinaire de toutes celles qui proviennent de la multiplication des 6 unités et des 3 dizaines du diviseur par 5000, de la multiplication des 3 dizaines et des 8 centaines du diviseur par 400, de la multiplication des 8 centaines et des 7 mille du diviseur par 80. Cette somme donne en tout 23 dizaines de mille. Je soustrais 23 de 346; le reste 323, sauf une erreur en plus qui ne peut surpasser 2, est le nombre des dizaines de mille contenues dans le quatrième dividende partiel ordinaire.

Ce nombre 323 donnera le quatrième chiffre du quotient, savoir 3 : on trouvera de la même manière le chiffre des dizaines 8. Mais ici se présente une circonstance remarquable. Le reste 7 est plus petit que 8, ce chiffre 8 peut donc être trop fort. Pour le vérifier, j'abaisse le chiffre 5 à côté de 7, et je fais la correction. La correction peut se faire, et le reste corrigé surpasse 2. Donc le produit du diviseur par 8 ne surpasse pas le cinquième dividende partiel ordinaire, donc le chiffre 8 convient. Le dividende partiel corrigé 47 est plus petit que 84, j'écris o au rang des dizaines, et le chiffre suivant 8 à côté de 7; je fais la correction, et je trouve ainsi au quotient le chiffre 5, puis le chiffre 3, etc.

8°. On peut donc formuler, ainsi qu'il suit, ce procédé de division ordinaire :

On prend pour diviseur désigné les deux ou trois premiers chiffres à gauche du diviseur, et sur la gauche du dividende une partie qui contienne ce diviseur désigné, et ne le contienne pas dix fois. On divise ce premier dividende partiel par le diviseur désigné, et l'on en soustrait le produit du diviseur désigné par le chiffre trouvé au quotient, en ayant soin de l'augmenter des dizaines provenant de la multiplication du premier chiffre négligé par ce chiffre du quotient. Si le reste ainsi obtenu est plus petit que le chiffre trouvé au quotient, ce chiffre est bon.

A côté du reste, on abaisse le premier chiffre négligé du dividende, on a un nouveau dividende partiel qu'il faut corriger en en soustrayant les unités de même ordre que son dernier chiffre, provenant du produit des deux premiers chiffres négligés du diviseur par le chiffre trouvé au quotient. On a ainsi un nouveau dividende partiel que l'on divise par le même diviseur désigné, ce qui donne le second chiffre du quotient; on retranche de ce second dividende partiel le produit du diviseur désigné par le nouveau chiffre du quotient, en ayant soin de l'augmenter des unités de même ordre provenant de la multiplication des chiffres négligés du diviseur par la partie trouvée du quotient, et si le reste diminué de deux unités est plus grand que ce chiffre du quotient, ce chiffre est bon.

A côté du reste, on abaisse le second chiffre négligé du dividende, on retranche du résultat ainsi obtenu les unités de même ordre que son dernier chiffre qui proviennent de la multiplication des trois premiers chiffres négligés du diviseur par les deux premiers chiffres du quotient; on a ainsi un troisième dividende partiel qu'on divise par le diviseur désigné, et ainsi de suite.

Lorsqu'il arrive qu'un reste diminué de 2 est plus petit que le chiffre dernièrement trouvé au quotient, ce chiffre peut être trop fort. On abaisse alors à côté de ce reste un nouveau chiffre du dividende, et l'on fait la correction. Si cette correction peut se faire, et que le reste soit plus grand que 2, le chiffre est bon, sinon le chiffre est trop fort, il faut le diminuer d'une unité et recommencer la vérification.

9°. Voici maintenant comment on peut faire la correction dont il est parlé. On multiplie le second chiffre négligé du diviseur par le nouveau chiffre obtenu au quotient, et l'on retient les dizaines; on multiplie le premier chiffre négligé par le même multiplicateur, on ajoute les unités de ce produit aux dizaines du précédent, et l'on écrit la somme. On multiplie le troisième chiffre négligé par le chiffre précédent du quotient, on retient les dizaines, puis le second chiffre négligé par le même multiplicateur, et l'on ajoute les unités de ce produit aux dizaines retenues, et l'on écrit cette somme au-dessous de la première, et ainsi de suite; on ajoute entre eux tous les résultats qu'on vient d'écrire, et la somme donne la correction qu'il y a à faire.