NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C.-W. BORCHARDT

Théorie des fractions continues algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 157-158

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__157_1>

THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES;

PAR M. C.-W. BORCHARDT (DE BERLIN).

On sait qu'on peut réduire en fraction continue la racine carrée d'un nombre entier. En est-il de même pour une fonction algébrique entière d'une seule variable? Abel, en cherchant dans quels cas l'intégrale $\int \frac{fx}{\sqrt{X}}\, dx$ (fx, X sont des fonctions entières de x) peut s'évaluer en logarithmes, a rattaché cette évaluation au développement en fraction continue de $\sqrt{X}$ (*Œuvres complètes*, tome I, page 33, et Crelle, tome I, page 184); ensuite, Jacobi ramène inversement ce développement à la multiplication de ce genre d'intégrales, mais seulement pour le cas où X est du quatrième degré, les intégrales étant alors *elliptiques* (Crelle, tome VII, page 41), et il donne ce résultat, sans démonstration. Dans un Mémoire inséré dans le journal de Crelle (tome XLVIII, cahier 1), M. Borchardt donne non-seulement cette démonstration, mais établit ce magnifique théorème :

$$\sqrt{x\,\varphi x} = \sqrt{x\,(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_{2\nu-1}} = r_0 + \frac{1}{2\,v_0}$$

$$+ \frac{1}{2\,v_1} + \ldots \frac{1}{2\,v_{n-1}} + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{x\,\varphi x} + r_n}{s_n}};$$

les r sont des fonctions entières de degré ν et les ν des fonctions, généralement parlant, du premier degré. La détermination de ces fonctions dépend de l'intégrale

$$\int_{\infty}^{0} \frac{l_0 + l_1 x + \ldots l_{r-2} x^{n-2}}{\sqrt{x \varphi x}} dx.$$

Des raisonnements rigoureux, des idées d'une clarté parfaite, une succession d'idées parfaitement coordonnées, qualités qui distinguent le célèbre analyste berlinois, rendent ce sujet difficile, d'une facile compréhension. Le Mémoire est écrit en français. En le reproduisont dans le *Journal de Mathématiques*, M. Liouville rendrait plus accessible aux géomètres français un modèle de style, de rédaction et de haute logique.