NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Note sur la théorie des asymptotes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 144-148

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__144_1>

NOTE SUR LA THÉORIE DES ASYMPTOTES (**);

PAR M. PAUL SERRET,
Professeur.

1. La détermination des coefficients angulaire et linéaire des asymptotes, telle qu'elle résulte de la méthode de M. Cauchy, repose, comme on sait, sur cette hypothèse, que l'on peut représenter l'ordonnée d'une branche de courbe ayant une asymptote dont l'équation est

$$y = cx + d$$

par une somme de deux parties dont la première est l'ordonnée même de l'asymptote, et la seconde une fonc-

(*) On a : pour infanterie, $n = \frac{1}{2}$; cavalerie, $n = \frac{1}{6}$; artillerie, $n = \frac{1}{15}$.

(**) Voir VANSSON, tome VIII, page 398. TM.

tion V de x et y, qui tend vers zéro quand x et y tendent vers l'infini.

Or, quoique, au point de vue théorique, la possibilité d'une pareille expression pour l'ordonnée de la courbe ne paraisse point douteuse, on doit convenir cependant qu'il est fâcheux qu'une théorie aussi importante que celle dont il s'agit, repose sur une transformation que l'on ne pourra réaliser que dans quelques cas très-particuliers.

On doit remarquer, en outre, que, dans la méthode de M. Cauchy, il n'existe aucune liaison entre les deux problèmes qui consistent à rechercher les asymptotes parallèles aux axes des x et des y, *ou* les asymptotes qui rencontrent ces axes. On comprend bien cependant, à priori, que ces deux problèmes peuvent être ramenés à dépendre l'un de l'autre, et que la détermination des asymptotes parallèles aux x et aux y, à laquelle on parvient d'une manière très-simple, par une méthode exempte de toute obscurité, et ne nécessitant aucune hypothèse, doit conduire à la détermination des asymptotes qui rencontrent ces axes. Ces considérations m'ont conduit à une théorie nouvelle, qui ne paraît présenter aucun des inconvénients de l'ancienne, et qui conduit d'ailleurs aux mêmes résultats par une voie aussi simple.

2. Première partie. *Détermination des asymptotes parallèles aux axes des x et des y.*

Les raisonnements ordinaires nous conduiront à la règle suivante :

Si $y = b$ représente une asymptote parallèle à ox, et si $x^m \varphi(y)$ représente l'ensemble des termes de l'équation de la courbe qui renferment la plus haute puissance de x, l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, b, sera l'une des racines réelles de l'équation

$$\varphi(y) = 0.$$

Corollaire. On déduit de cette règle les conséquences suivantes :

1°. *Pour que la courbe ait au moins une asymptote parallèle à ox, il faut que la plus haute puissance de x qui entre dans l'équation soit multipliée par une fonction de y ;*

2°. *Pour obtenir l'ordonnée à l'origine de l'asymptote parallèle à ox, il suffit d'égaler à zéro la fonction de y qui multiplie la plus haute puissance de x, et de chercher les racines réelles de l'équation résultante.*

Ces considérations vont nous permettre de déterminer par un même calcul les coefficients angulaire et linéaire des asymptotes qui rencontrent les axes.

Remarque. On parviendrait de la même manière à une règle semblable pour les asymptotes parallèles à oy.

3. Deuxième partie. *Détermination des asymptotes non parallèles à oy.*

Soient

$$y = cx + d$$

une asymptote non parallèle à oy, et

$$(1)\qquad x^m f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

l'équation de la courbe, mise sous la forme ordinaire.

Menons par l'origine des axes actuels, ox' parallèle à l'asymptote, et passons du système d'axes ox, oy au système ox', oy ; les formules de transformation seront

$$x = kx', \quad y = y' + cx = y' + ckx',$$

d'où

$$(2)\qquad \begin{cases} x = kx', \\ \dfrac{y}{x} = c + \dfrac{y'}{kx'}, \end{cases}$$

k étant un nombre.

Substituant à x et à $\frac{y}{x}$, dans l'équation (1), leurs valeurs tirées de l'équation (2), il viendra, pour l'équation de la courbe par rapport aux nouveaux axes,

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{c} k^m x'^m \left[f_1(c) + \frac{y'}{kx'} f_1'(c) + \frac{A}{x'^2} \right] \\ + k^{m-1} x'^{m-1} \left[f_2(c) + \frac{B}{x'} \right] + x'^{m-2} C \end{array} \right\} = 0.$$

Or, la courbe ayant une asymptote parallèle à l'axe actuel des x, ox' :

1°. Il est nécessaire que le multiplicateur *numérique* de la plus haute puissance m de x' s'annule, ce qui donne l'équation

$$(I)\qquad f_1(c) = 0,$$

laquelle détermine les coefficients angulaires des asymptotes;

2°. D'après l'équation de condition (I), x'^{m-1} est la plus haute puissance de x' qui persiste dans l'équation (3), son multiplicateur est $k^{m-1}[y' f_1'(c) + f_2(c)]$; nous devons donc, d'après ce qui précède, l'égaler à zéro, et la valeur de y' satisfaisant à l'équation

$$y' f_1'(c) + f_2(c) = 0,$$

nous donnera l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, à savoir

$$(II)\qquad y' = d = -\frac{f_2(c)}{f_1'(c)}.$$

Remarque I. Si une racine réelle et multiple de l'équation (I) annulait $f_2(c)$, x'^{m-1} ne serait plus la plus haute puissance de x' entrant dans l'équation (3); mais x'^{m-2} étant alors la plus haute puissance de x' persistant dans l'équation, son multiplicateur égalé à zéro fournira une équation du second degré en y', dont les racines réelles fourniront les coefficients linéaires de deux asymptotes parallèles à ox', correspondant à la racine multiple de l'équation (I), que nous considérons.

Remarque II. Il est peut-être inutile de faire observer que l'ordonnée à l'origine d'une asymptote par rapport aux axes ox', oy, est aussi l'ordonnée à l'origine par rapport aux axes primitifs ox, oy.