Nouvelles annales de mathématiques

Théorème combinatoire de M. Stern, démontré par M. A., capitaine d'artillerie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 138
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__138_0>

THÉORÈME COMBINATOIRE DE M. STERN,

DÉMONTRE PAR M. A.,

Capitaine d'Artillerie.

1. *Notation.* $C_n'^p =$ classe combinatoire d'ordre p, avec n éléments $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ et *avec répétition;* $C_n^p =$ id, *sans répétition.*

2. Théorème.

$$C_n'^p - C_n^1 C_n'^{p-1} + C_n^2 C_n'^{p-2} - C_n^3 C_n'^{p-3} + \ldots (-1)^n C_n^p = 0.$$

Démonstration. Désignons cette série par S_n^p; $C_n'^p$ est évidemment le coefficient de h^p dans le produit infini

$$P = (1 + a_1 h + a_1^2 h^2 + \ldots)(1 + a_2 h + a_2^2 h^2 + \ldots)(1 + a_3 h + a_3^2 h^2 + \ldots)\ldots;$$

donc

$$1 + C_n'^1 h + C_n'^2 h^2 + \ldots = P = \frac{1}{(1 - a_1 h)(1 - a_2 h)\ldots(1 - a_n h)};$$

d'où l'on tire, en faisant disparaître le dénominateur qui n'est autre que $1 - C_n h + C_n^2 h^2 - C_n^3 h^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n h^n$,

$$1 = 1 + \Sigma_p S_n^p h^n;$$

donc

$$S_n^p = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note du rédacteur. J'ai donné une démonstration, mais bien moins simple, du même théorème, dans le *Journal de Mathématiques*, tome III, page 559.