H. ROCHETTE

Solution de la question 284

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 121-124

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__121_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 284

(voir t. XII, p. 443);

PAR M. H. ROCHETTE, S. J.,
de la maison ecclésiastique de Vals, près Le Puy.

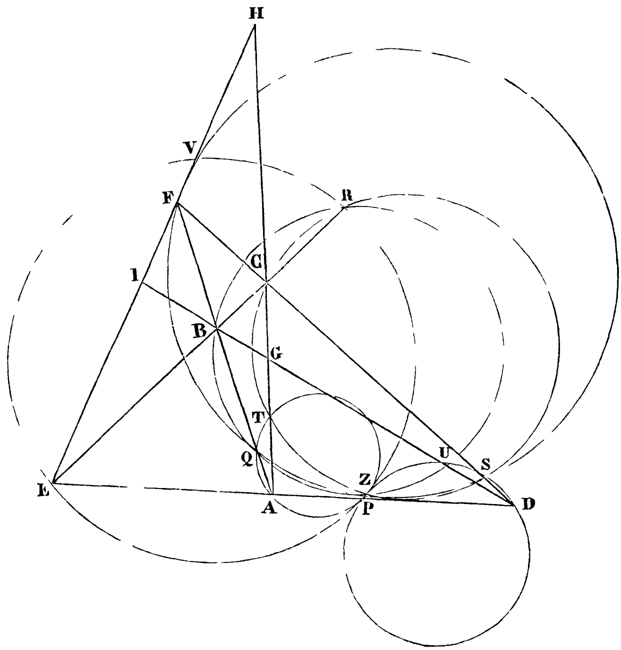
Soient le quadrilatère plan ABCD; E l'intersection des côtés CB et DA; F l'intersection de BA, CD. Prenons un point quelconque T sur la diagonale AC; par les deux points A et T faisons passer un *premier* cercle; par C et T, un *deuxième* cercle : le premier cercle coupe AD en P et AB en Q; le deuxième cercle coupe CB en R et CD en S. Par les points Q, B, R faisons passer un *troisième* cercle, et par les points P, D, S un *quatrième* cercle; ces deux derniers cercles (troisième et quatrième) couperont la diagonale BD en un même point U. Menons un *cinquième* cercle par les points P, E, R, et un *sixième* cercle par les points Q, F, S : ces deux derniers cercles coupent la troisième diagonale EF au même point V.

Les six cercles se coupent en un même point Z, et les six arcs ZA, ZB, ZC, ZD, ZE, ZF, pris d'un même côté, sont semblables.

Soit G l'intersection des deux diagonales AC, BD; les quatre points G, U, T, Z sont sur une même circonférence.

Soit H l'intersection des diagonales AC, EF; les quatre points H, V, T, Z sont sur une même circonférence.

Soit enfin I l'intersection des diagonales BD, EF; les quatre points I, U, V, Z (*) sont sur une même circonférence. (Mobius.)



Les deux premiers cercles se coupant en Z, le troisième, qui passe par les points Q, B, R, passera aussi par ce point Z; car le quadrilatère QBRZ est inscriptible, puisque

$$\text{ang BRZ} = \text{ang ATZ} = \text{ang AQZ}.$$

(*) La lettre I, qui se trouve dans l'énoncé, nous a paru devoir être remplacée par la lettre V.

De même, nous avons

$$\text{ang ZSC} = \text{ang ATZ} = \text{ang ZPD},$$

et le quadrilatère PDSZ étant inscriptible, le cercle qui passe par les points P, D, S passe aussi par le point Z.

U étant le point de rencontre du troisième cercle avec la diagonale BD, si U′ est le point de rencontre du quatrième cercle avec cette même diagonale, on a

$$\text{ang BUZ} = \text{ang AQZ} = \text{ang ZPD},$$

et, par conséquent, les angles BUZ, DU′Z sont supplémentaires, c'est-à-dire que les points U et U′ se confondent en un seul.

Le quadrilatère PERZ est inscriptible, car

$$\text{ang CRZ} = \text{ang ATZ} = \text{ang ZPD}.$$

Le cinquième cercle passe donc par le point Z.

Le quadrilatère FQSZ est aussi inscriptible, car nous avons

$$\text{ang CSZ} = \text{ang ATZ} = \text{ang AQZ},$$

et, par conséquent, les angles FSZ, FQZ sont supplémentaires. Le sixième cercle passe donc par le point Z.

Soient V et V′ les points où le cinquième et le sixième cercle rencontrent la diagonale FE; ces deux points se confondent en un seul, car

$$\text{ang EVZ} = \text{ang ZPD} = \text{ang AQZ} = \text{ang FV}'\text{Z}.$$

Ainsi, les six cercles se coupent en un même point Z, et les six arcs ZA, ZB, ZC, ZD, ZE, ZF, pris d'un même côté, sont semblables, puisque les angles ZQA, ZRB, ZSC, ZPD, ZVE, ZSF sont égaux, comme on l'a vu dans le cours de la démonstration.

G étant le point d'intersection des diagonales BD, AC, les quatre points G, U, T, Z sont sur une même circonférence, puisqu'on a

$$\text{ang}\, GUZ = \text{ang}\, AQZ = \text{ang}\, ATZ.$$

Les quatre points H, V, T, Z, sont aussi sur une même circonférence, car

$$\text{ang}\, HVZ = \text{ang}\, EPZ = \text{ang}\, HTZ.$$

L'angle $EVZ = \text{ang}\, ZPD = \text{ang}\, IUZ$, d'où le quadrilatère IUVZ est inscriptible, et les quatre points I, U, V, Z sont sur une même circonférence.