

E. PROUHET

Sur un problème de combinaisons

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 12
(1853), p. 85-90

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__85_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME DE COMBINAISONS;

PAR M. E. PROUHET.

I.

La question que je me propose de résoudre est la suivante : *Combien y a-t-il de manières de résoudre m équations à m inconnues, en variant autant que possible l'ordre des éliminations et des substitutions ?*

Soient R_m le nombre cherché et E_n le nombre des manières d'éliminer une inconnue entre n équations.

L'ordre dans lequel on dispose les m inconnues, pour chasser successivement les $m - 1$ premières, peut être varié de 1. 2. 3, ..., m ou de P_m manières, ce qui fait d'abord P_m modes de résolution distincts.

Mais la première, la seconde, la $n^{i\text{ème}}$ inconnue peuvent être éliminées respectivement de E_m , de E_{m-1} , de E_n manières. Le nombre des modes déjà trouvés doit donc être multiplié par le produit $E_m E_{m-1}, \dots, E_3 E_2$.

Ensuite, quand on aura trouvé $n - 1$ inconnues, il y aura n manières d'en obtenir une $n^{i\text{ème}}$ en résolvant une quelconque des n équations qui renferment cette inconnue avec les $n - 1$ premières. Il y aura donc deux manières d'obtenir la deuxième inconnue, trois manières d'obtenir la troisième, etc., ce qui multiplie encore par P_m le nombre des modes déjà trouvés.

De sorte que nous aurons, en définitive,

$$R_m = P_m^2 E_m E_{m-1} \dots, E_3 E_2.$$

II.

Il s'agit maintenant de trouver E_m, E_{m-1} , etc., ou simplement E_m , c'est-à-dire de résoudre ce problème : *Com-*

bien y a-t-il de manières d'éliminer une inconnue entre m équations ?

Désignons ces équations par les nombres $1, 2, 3, \dots, m$. Pour en chasser une inconnue x , il faut éliminer $m - 1$ fois x entre deux de ces équations, en ayant soin d'employer chaque équation au moins une fois. D'après cela, si l'on forme les $\frac{m(m-1)}{2}$ combinaisons deux à deux des m premiers nombres, savoir :

$$\begin{aligned} &(1, 2) \\ &(1, 3) (2, 3) \\ &(1, 4) (2, 4) (3, 4) \\ &(1, 5) (2, 5) (3, 5) \\ &\dots\dots\dots \\ &(1, m) (2, m) (3, m), \dots, (m-1) m, \end{aligned}$$

les différents modes d'élimination que l'on pourra employer correspondront aux combinaisons $m - 1$ à $m - 1$ des termes de ce tableau, en excluant celles où manqueraient quelques-uns des nombres $1, 2, \dots, m$.

Pour abrégé le discours, nous réserverons le nom de *groupe* aux combinaisons dont nous venons de parler.

III.

Le nombre total des groupes possibles est

$$C_{m-1}^T,$$

l'indice inférieur désignant le nombre des couples qui entrent dans chaque combinaison, et l'indice supérieur T_m servant à représenter le nombre triangulaire $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$.

T_{m-2} étant le nombre triangulaire égal ou immédiate-

ment supérieur à $m - 1$, il ne pourra manquer dans aucun groupe plus de z nombres; car si l'on ôte du tableau qui renferme tous les couples les $z + 1$ premières colonnes, les T_{m-z-1} couples restants ne peuvent former de groupes, puisqu'on a, par hypothèse,

$$T_{m-z-1} < m - 1.$$

On aura donc

$$C_{m-1}^T = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_z,$$

X_0 désignant le nombre des groupes où ne manque aucun nombre, X_1 le nombre de ceux où il en manque un seulement, X_2 le nombre de ceux où il en manque deux, et ainsi de suite.

IV.

On peut déterminer d'abord X_z . Si sur les T_m couples on laisse ceux qui contiennent z nombres pris à volonté, les T_{m-z} autres couples fourniront $C_{m-1}^{T_{m-z}}$ groupes où n'entrent pas les z nombres considérés. La même opération pouvant se répéter autant de fois qu'il y a de manières de prendre z choses sur m , on aura

$$X_z = C_z^m C_{m-1}^{T_{m-z}}.$$

Tous les X seront donc connus si l'on parvient à établir une relation entre X_i et X_{i+1} , X_{i+2} , etc.

V.

A cet effet, considérons i nombres sur m , par exemple

$$1, 2, 3, \dots, i;$$

les groupes où n'entrent pas ces nombres s'obtiendront en combinant $m - 1$ à $m - 1$ les T_{m-i} couples où ces nom-

bres manquent. La même chose ayant lieu pour chaque manière de prendre i nombres sur m , on voit qu'en prenant

$$C_i^m C_{m-i}^{T_{m-i}},$$

on sera sûr de compter, et chacun une seule fois, les groupes où n'entrent pas i des m nombres; mais il faut en retrancher les groupes où manquent plus de i nombres.

Or, tout groupe où manquent $i+1$ nombres, par exemple

$$1, 2, 3, \dots, i, i+1,$$

fait partie des groupes où manquent i de ces nombres, et est compté $i+1$ fois. Il faut donc d'abord déduire du nombre précédent $(i+1) X_{i+1}$.

Un groupe où manquent $i+2$ nombres, par exemple

$$1, 2, 3, \dots, i, i+1, i+2,$$

fait partie des groupes où manquent i de ces nombres, et est ainsi répété $\frac{(i+1)(i+2)}{1.2}$ fois. On aura donc à dé-

duire, pour les groupes de cette classe, $\frac{(i+1)(i+2)}{1.2} X_{i+2}$.

On verrait de même qu'il faut déduire, à cause des groupes où manquent $i+3$ nombres, le nombre $\frac{(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3} X_{i+3}$, et ainsi de suite. On aura donc

$$X_i = C_i^m C_{m-i}^{T_{m-i}} - \frac{i+1}{1} X_{i+1} - \frac{(i+1)(i+2)}{1.2} X_{i+2} \\ - \frac{(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3} X_{i+3} - \dots$$

VI.

Si l'on fait successivement, dans cette formule, $i = z-1$, $z-2$, $z-3$, on trouve, toutes réductions

faites,

$$X_{z-1} = C_{z-1}^m C_{m-1}^{T_{m-z+1}} - \frac{z}{1} C_z^m C_{m-1}^{T_{m-z}},$$

$$X_{z-2} = C_{z-2}^m C_{m-1}^{T_{m-z+2}} - \frac{(z-1)}{1} C_{z-1}^m C_{m-1}^{T_{m-z+1}} \\ + \frac{(z-1)z}{1 \cdot 2} C_z^m C_{m-1}^{T_{m-z}},$$

$$X_{z-3} = C_{z-3}^m C_{m-1}^{T_{m-z+3}} - \frac{z-2}{1} C_{z-2}^m C_{m-1}^{T_{m-z+2}} \\ + \frac{(z-2)(z-1)}{1 \cdot 2} C_{z-1}^m C_{m-1}^{T_{m-z+1}} - \frac{(z-2)(z-1)z}{1 \cdot 2 \cdot 3} C_z^m C_{m-1}^{T_{m-z}},$$

formules dont la loi est évidente et qui donnent, par induction,

$$X_n = C_n^m C_{m-1}^{T_{m-n}} - \frac{n+1}{1} C_{n-1}^m C_{m-1}^{T_{m-n-1}} \\ + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} C_{n-1}^m C_{m-2}^{T_{m-n-2}} - \dots;$$

et, si l'on fait $n = 0$,

$$X_0 = C_{m-1}^m - C_1^m C_{m-1}^{T_{m-1}} + C_2^m C_{m-1}^{T_{m-2}} - C_3^m C_{m-1}^{T_{m-3}} + \dots$$

Mais X_0 n'est autre chose que ce que nous avons désigné en commençant par E_m . Donc notre problème est résolu.

Comme vérification, on s'assurerait facilement, d'après les formules précédentes, que la somme des nombres $X_0, X_1, X_2, \dots, X_z$ est égale à C_{m-1}^m .

VII.

Le nombre R_m croît très-rapidement avec son indice, comme on en jugera par le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} E_2 = 1, & R_2 = 4, \\ E_3 = 3, & R_3 = 108, \\ E_4 = 16, & R_4 = 27648, \\ E_5 = 135, & R_5 = 122112000. \end{array}$$

Nous remarquerons, en terminant, que quelques-unes de nos formules peuvent servir à résoudre des problèmes relatifs à la géométrie de situation. Ainsi X_0 , $\frac{X_1}{m}$, $\frac{1 \cdot 2 \cdot X_2}{m(m-1)}$, indiquent respectivement le nombre de manières de mener $m-1$ droites entre m , $m-1$, $m-2$, etc., points, de telle sorte qu'aucun de ces points ne soit isolé.