NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BRASSINNE

Nouvelle analogie de l'algèbre et du calcul intégral

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 82-84

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__82_1>

NOUVELLE ANALOGIE DE L'ALGÈBRE ET DU CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. E. BRASSINNE.

Soit $f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0$, une équation différentielle linéaire de l'ordre m; changeons y en yu (u étant une fonction indéterminée de x), nous aurons le développement suivant :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} f[x, yu, (yu)', \ldots, (yu)^{(m)}] = f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}).u \\ + {}'f(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\dfrac{du}{dx} + {}''f(x, y, y', \ldots)\dfrac{d^2 u}{1.2.dx^2} + \ldots \end{array}\right.$$

L'expression (1) est bien connue des géomètres, et d'Alembert en fait usage pour démontrer un théorème de Lagrange. Le premier terme du second membre est l'équation proposée elle-même, multipliée par u. Le second terme contient une fonction que nous avons désignée par ${}'f(x, y, y' \ldots)$. Cette fonction, que j'ai appelée conjuguée première, dans un Mémoire sur la composition des

(*) C'est par erreur que le théorème est attribué à M. Catalan.

équations différentielles, s'obtient en dérivant la proposée par rapport aux ordres différentiels, comme en Algèbre on dérive par rapport aux exposants. Si, par exemple, on a

$$f(x,y,y'\ldots) = \frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + B\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots,$$

on trouvera

$$'f(x,y,y'\ldots) = m.\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (m-1)A\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + (m-2)B\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} + \ldots.$$

Les fonctions $''f(x,y,y'\ldots)$, $'''f(x,y,y'\ldots)$, etc., correspondent aux dérivées secondes, troisièmes, ...

Cela posé, supposons que u soit une fonction de x, développée ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} u &= a + be^{\alpha x} + ce^{2\alpha x} + de^{3\alpha x} + \ldots \\ &= M + N\alpha x + P\alpha^2 x^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Faisons, pour plus de simplicité, $M = 1$, N positif. En portant cette valeur de u dans l'équation (1), on trouve

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & f[x,y,(yu)'\ldots] = f(x,y,y'\ldots)(1 + N\alpha x + \ldots) \\ & + \alpha\, 'f(x,y,y'\ldots)(N + 2P\alpha x + \ldots) \\ & + \alpha^2\, ''f(x,y,y'\ldots)(2P + \ldots). \end{aligned} \right.$$

Ce développement fait voir que le premier membre et le premier terme du second membre resteront de même signe, quel que soit x, lorsque α sera infiniment petit, si l'on substitue pour y une fonction quelconque de x. Mais si cette fonction de x, que nous appellerons $\varphi(x)$, est une intégrale de la proposée (nous supposerons la constante qui la multiplie égale à 1), le premier terme du second membre sera identiquement nul ; de sorte que, dans le cas de α positif et très-petit, le premier membre aura le même signe que $'f(x,y,y'\ldots)$. Mais si, dans l'expression de u, on supposait α très-petit et négatif, le premier membre serait de signe contraire à $'f(x, y, y' \ldots)$. D'où résulte ce théorème : *Si, dans une équation différentielle linéaire, on substitue, au lieu de y,*

$$\varphi x (1 + \mathrm{N} \alpha x + \ldots) \quad \text{et} \quad \varphi(x)(1 - \mathrm{N} \alpha x + \ldots),$$

$\varphi(x)$ étant une intégrale de cette équation, les deux substitutions donneront des résultats en x constamment de signes contraires si α est très-petit.

Le théorème suppose que $\varphi(x)$ ne soit pas une intégrale de la fonction $'f(x, y, y' \ldots) = 0$, car alors le changement de signe de α ne changerait pas le signe du second membre; mais le théorème subsisterait, si un nombre pair de fonctions $'f$, $''f$, $'''f, \ldots$, était annulé par $y = \varphi(x)$. Ce cas, qui correspond en Algèbre à celui des racines égales, entraîne pour la proposée, indépendamment de $\varphi(x)$, des intégrales $x\varphi(x)$, $x^2\varphi(x)$, $x^3\varphi(x), \ldots$, en même nombre que les fonctions $'f$, $''f$, $'''f, \ldots$, annulées, comme on peut le démontrer par l'équation (2), et comme je l'ai fait voir dans un Mémoire de 1842.

Remarquons que si la fonction indéterminée u était représentée par $e^{\alpha x}$, les expressions $y_1 = e^{\alpha x} \varphi(x)$, $y_2 = e^{-\alpha x} \varphi(x)$ représenteraient des courbes au-dessus et au-dessous de la courbe $y = \varphi(x)$, fournie par l'intégrale.

Le théorème que nous avons énoncé a une réciproque évidente. Si, par exemple, deux substitutions $\varphi(x) e^{\alpha x}$, $\varphi(x) e^{-\alpha x}$ donnent, dans la proposée $f(x, y, y', \ldots)$, des résultats en x constamment de signe contraire, α étant très-petit, $\varphi(x)$ sera une intégrale de cette proposée.