NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Solution de la question 25

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 80-82

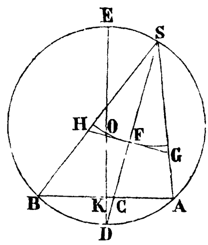
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__80_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 25

(voir t. I, p. 247);

PAR M. H. FAURE.

THÉORÈME I. *De tous les cônes inscrits dans un segment sphérique, celui qui a pour sommet le pôle de la base a le plus petit angle solide. La somme de deux angles solides des cônes qui ont pour sommets respectifs les pôles de la base commune, est égale à* 4. (CATALAN.)



Démonstration. Soit S le sommet du cône; menons par ce point et le centre de la sphère un plan perpendiculaire au petit cercle de base; AB sera le diamètre de ce cercle, SA, SB les génératrices minimum et maximum du cône. Pour déterminer les pôles D et E du petit cercle, abaissons du centre O une perpendiculaire OK sur AB.

(*) Ce problème est aussi résolu dans la *Géométrie* de M. Catalan.

La droite SD sera l'axe de notre cône; et si, pour mesurer l'angle solide, nous décrivons du point S comme centre, avec un rayon quelconque, une sphère, elle coupera l'axe en F. Menons alors par ce point un plan tangent à la sphère S; le cône y déterminera une ellipse dont l'ellipse sphérique tracée sur la sphère S peut être considérée comme la perspective relativement au point S. Ces deux surfaces seront évidemment minimum à la fois. Si l'on appelle G, H les points où le plan tangent que nous avons mené rencontre les génératrices SA, SB de notre cône, la trace GH sera l'un des axes de l'ellipse plane, l'autre se trouvera projeté en F. Or, le premier ayant une longueur constante, la question se trouve ramenée à trouver le minimum du second. Cela est bien simple; car, si l'on suppose aux points C et F deux perpendiculaires au plan de la figure, elles rencontreront la génératrice du cône projetée sur SD en des points C′ et F′, tels que $CC' : FF' :: SC : SF$; d'où

$$FF' = \frac{CC'}{SC} \cdot SF,$$

où FF′ est le second axe; mais

$$CC' = \sqrt{AC.CB} = \sqrt{SC.CD};$$

donc

$$FF' = \sqrt{\frac{CD}{SC}} \cdot SF.$$

Et l'on voit sous cette forme que le rapport de $\frac{CD}{SC}$ sera minimum lorsque le point S se confondra avec le point E.

Quant à la seconde partie de la question, elle n'est pas moins évidente : il suffit de se rappeler la définition que l'on donne pour la mesure de l'angle solide d'un cône. Or on voit facilement qu'en divisant l'aire de l'ellipse sphérique par $\frac{1}{8}$ de la surface totale de la sphère, on obtient un quotient proportionnel à l'angle solide. D'après cela, si nous désignons par D et E nos deux angles solides, on trouvera

$$D = 4 \cdot \frac{\text{arc AEB}}{\text{circonf. OD}}, \quad E = 4 \cdot \frac{\text{arc ADB}}{\text{circonf. OD}},$$

en donnant, pour plus de simplicité, aux sphères auxiliaires le même rayon qu'à la sphère donnée. On déduit de là

$$D + E = 4 \ (^*).$$