HOUSEL

Division pratique de la circonférence en parties égales

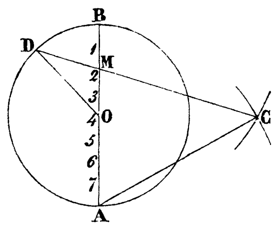
Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 77-80

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__77_0>

DIVISION PRATIQUE DE LA CIRCONFÉRENCE EN PARTIES ÉGALES;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

On trouve, dans le *Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques*, par BION, page 22 [4e édit., Paris, 1752 (*)], la règle pratique suivante pour diviser une circonférence en un nombre n de parties égales : Divisez le diamètre AB en autant de parties égales qu'on veut en avoir sur la circonférence; des points A et B comme centres, et avec AB comme rayon, décrivez deux arcs de cercle qui se coupent en C, puis joignez le point C *à la seconde division du diamètre;* cette ligne prolongée ira couper la circonférence en D, et BD sera la portion demandée de la circonférence.



Dans la figure, on a pris $n = 8$.

Mais il est important de savoir quelle approximation donne ce procédé, et c'est ce que nous allons chercher.

Posons

$$AMC = \alpha, \quad ACM = \beta \quad \text{et} \quad DOB = \gamma.$$

(*) Beaucoup de ces instruments ont été changés et très-perfectionnés, d'autres ne sont plus en usage. Un nouvel ouvrage de ce genre serait une excellente acquisition pour les mathématiques appliquées M. Schneitler a publié un tel ouvrage à Leipsig; la 2e édition est de 1852. TM.

Dans le triangle MCA, on a la proportion

$$\sin\alpha : \sin 6 :: 2R : 2R - 2 \,.\, \frac{2R}{n} :: 1 : 1 - \frac{2}{n},$$

car

$$AC = 2R = AB,$$

et d'ailleurs

$$6 = 120 - \alpha.$$

Ensuite, comme $DMO = 180 - \alpha$, le triangle DMO donne

$$\sin\alpha : \sin(\alpha - \gamma) :: R : R - 2\frac{2R}{n} :: 1 : 1 - \frac{4}{n}.$$

On a donc

$$\sin\alpha : \sin(120 - \alpha) :: 1 : 1 - \frac{2}{n},$$

et

$$\sin\alpha : \sin(\alpha - \gamma) :: 1 : 1 - \frac{4}{n}.$$

En divisant chaque équation par $\sin\alpha$. On a d'abord

$$1 : \sin 120 \cot\alpha - \cos 120 :: 1 : 1 - \frac{2}{n}.$$

Or

$$\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \cos 120 = -\frac{1}{2};$$

donc

$$\frac{\sqrt{3}\,.\cot\alpha + 1}{2} = \frac{n-2}{2},$$

et

$$\sqrt{3}\cot\alpha = \frac{2n-4}{n} - 1 = \frac{n-4}{n}; \quad \cot\alpha = \frac{n-4}{n\sqrt{3}}.$$

Ensuite

$$1 : \cos\gamma - \sin\gamma\cot\alpha :: 1 : 1 - \frac{4}{n},$$

ce qui donne

$$\cos\gamma - \frac{\sin\gamma\,(n-4)}{n\sqrt{2}} = \frac{n-4}{n}.$$

Soit $\cos\gamma = x$; on a

$$\frac{(1-x^2)(n-4)^2}{3n^2} = \frac{(n-4)^2}{n^2} + x^2 - \frac{2x(n-4)}{n},$$

$$x^2\left[1+\frac{(n-4)^2}{3n^2}\right] - \frac{2x(n-4)}{n} + \frac{2(n-4)^2}{3n^2} = 0;$$

d'où

$$x^2[3n^2+(n-4)^2] - 6n(n-4)x + 2(n-4)^2 = 0,$$

et enfin

$$x = (n-4).\frac{3n+\sqrt{n^2+16(n-2)}}{3n^2+(n-4)^2}.$$

On rejette le signe — qui donnerait des cosinus négatifs dans les valeurs de n suffisamment petites.

Il ne reste plus qu'à comparer les valeurs approximatives aux valeurs exactes :

Différences.				
0	$n=3$,		exact.	
0	$n=4$,		exact.	
— 5′ 48″	$n=5$,	$\gamma = 71°57'\ 12''$	au lieu de	72°,
0	$n=6$,		exact.	
5′ 22	$n=7$,	$\gamma = 51.31.\ 5$	au lieu de	51.25′43″,
11.14	$n=8$,	$\gamma = 45.11.14$	*id.*	45,
16.40	$n=9$,	$\gamma = 40.16.40$	*id.*	40,
21.24	$n=10$,	$\gamma = 36.21.24$	*id.*	36,
25.14	$n=11$,	$\gamma = 33.\ 8.52$	*id.*	32.43.38,
29.45	$n=12$,	$\gamma = 30.29.45$	*id.*	30,
31.58	$n=13$,	$\gamma = 28.12.30$	*id.*	27.41.32,
32.56	$n=14$,	$\gamma = 26.15.48$	*id.*	25.42.52,
34.30	$n=15$,	$\gamma = 24.34.30$	*id.*	24,
35.54	$n=16$,	$\gamma = 23.\ 5.54$	*id.*	22.30,
36.37	$n=17$,	$\gamma = 21.47.12$	*id.*	21.10.35.

Les différences augmentent comme on devait s'y attendre, mais très-lentement.

Le calcul a été poussé jusqu'au polygone de dix-sept côtés que l'on sait maintenant inscrire exactement; mais la construction qui résulterait des calculs de M. Gauss serait tellement pénible, que cette approximation vaudrait encore mieux dans la pratique (*).