

PAUL SERRET

**Théorème sur le mouvement d'un triangle dans un plan**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 12 (1853), p. 68-70

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1853\\_1\\_12\\_\\_68\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__68_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

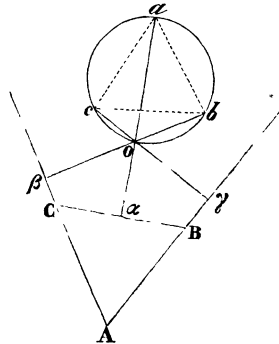
**THÉORÈME SUR LE MOUVEMENT D'UN TRIANGLE DANS UN PLAN;**

PAR M. SERRET (PAUL),  
Professeur.

**THÉORÈME.** Soient  $a, b, c$  les trois côtés d'un triangle ABC qui se meut d'une manière quelconque dans son plan, mais sans varier de forme ni de grandeur; à une époque quelconque du mouvement, soient  $f_{(a)}, f_{(b)}, f_{(c)}$  les rayons de courbure des courbes enveloppées par les trois côtés  $a, b, c$ , respectivement aux points où ces côtés les touchent actuellement; on aura la relation

$$a \cdot f_{(a)} + b \cdot f_{(b)} + c \cdot f_{(c)} = \text{constante} = 2S,$$

$S$  désignant la surface du triangle.



**Lemme.** Si les deux premiers côtés AB, AC d'un triangle donné sont constamment tangents respectivement à deux cercles donnés dont les centres sont  $c, b$ , le troisième côté BC enveloppera un troisième cercle ayant son centre en  $o$ . (BOBILIER.)

Soient, en effet,  $\beta, \gamma$  les points actuels de contact des côtés AC, AB sur leurs cercles respectifs, et soit  $o$  l'intersection des deux rayons  $b\beta, c\gamma$ , perpendiculaires aux côtés

tés AC, AB; le point  $o$  sera, d'après un théorème connu, le centre instantané de rotation pour la position actuelle de la figure; et si l'on abaisse  $o\alpha$  perpendiculaire sur CB, le point  $\alpha$  sera le point où BC touche son enveloppe. Pour démontrer que cette enveloppe est un cercle, il me suffira de prouver que la normale  $o\alpha$  va passer par un point fixe, et c'est ce qu'il est facile de voir; car, sur la ligne fixe  $bc$ , décrivons un segment capable de l'angle  $180^\circ - A$ , et soit  $\alpha$  le point où la droite  $o\alpha$  va couper cette circonférence, qui demeure invariable dans le mouvement du triangle; nous aurons

$$\text{angle } Co\alpha = \widehat{B}, \quad bo\alpha = \widehat{C}.$$

Donc le point  $a$  divise l'arc de cercle constant  $cab$  dans un rapport constant; donc le point  $a$  est fixe.

Par conséquent, toutes les normales à la courbe enveloppe du côté libre BC vont concourir en un point fixe  $a$ ; donc cette courbe enveloppe est un cercle ayant le point  $a$  pour centre.

*Remarque.* Bobilier arrive à la même conclusion autrement et d'une manière très-élégante (*voyez sa Géométrie*, page 297), en prouvant que la distance  $a\alpha$  reste constante; mais il ne va pas plus loin, et ne cherche pas la relation qui peut exister entre les trois rayons.

Cherchons maintenant une relation entre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $f_{(a)}$ ,  $f_{(b)}$ ,  $f_{(c)}$ .

Pour cela, l'aire du triangle ABC étant la différence entre la somme des aires des triangles  $oAC$ ,  $oAB$ , et celle du triangle  $oBC$ , on a

$$(1) \quad b \cdot o\beta + c \cdot o\gamma - a \cdot o\alpha = 2S.$$

En outre, le quadrilatère inscrit  $ocab$  nous donne, en vertu du théorème de Ptolémée,

$$(2) \quad ob \cdot ac + oc \cdot ab - oa \cdot bc = 0.$$

Mais, le triangle  $abc$  étant semblable au triangle ABC à cause de l'égalité des angles, on peut remplacer dans (2) les lignes  $ac$ ,  $ab$ ,  $bc$  par leurs proportionnelles AC, AB, BC, ou  $b$ ,  $c$ ,  $a$ ; donc on aura, à la place de (2),

$$(2') \quad b.ob + c.oc - a.oa = 0.$$

Ajoutant (1) et (2') membre à membre, il vient

$$b.b\beta + c.c\gamma - a.a\alpha = 2S;$$

ou bien, en prenant convenablement les signes,

$$a.f_{(a)} + b.f_{(b)} + c.f_{(c)} = 2S. \quad \text{C. Q. F. D (*)}$$