NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EDMOND LAGUERRE-VERLY

Note sur la théorie des foyers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 57-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__57_0>

NOTE SUR LA THÉORIE DES FOYERS;

PAR M. EDMOND LAGUERRE-VERLY,
Élève (institution Barbet).

I.

1. Considérons trois coniques ayant un même foyer F, et sur une droite arbitraire FZ passant par ce foyer, prenons trois points A, B et C, correspondant respectivement aux trois coniques. Menons par chacun de ces points deux tangentes à la conique correspondante, et joignons les six points de contact au foyer : nous obtiendrons ainsi trois couples de droites ayant pour bissectrice commune la ligne FZ; donc ils formeront un faisceau en involution.

En généralisant par l'homographie cette propriété, nous obtiendrons le théorème suivant :

THÉORÈME I. *Si trois coniques sont tangentes à deux mêmes droites se coupant en* O, *et que, sur une droite* OZ *passant par ce point, on prenne trois points* A, B, C *correspondant aux trois coniques; si, par chacun de ces points, on mène des tangentes à la conique correspondante, en joignant les six points de contact ainsi obtenus au point* O, *on obtiendra un faisceau en involution.*

Remarque. Si les trois coniques se réduisent à une seule, on retombe sur la proposition suivante, due à M. Chasles :

Si trois cordes d'une conique se coupent en un même point, les six points qu'elles interceptent sur la conique sont en involution; c'est-à-dire qu'en joignant ces six points à un point quelconque de la conique, on a un faisceau en involution.

Si les trois points A, B et C se confondent, on obtient le théorème énoncé tome XI, page 292.

J'indiquerai encore les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME II. *Si une conique variable est assujettie à rester tangente à deux droites fixes* A *et* B, *le lieu des pôles d'une droite* D *passant par le point de rencontre de* A *et de* B *par rapport à cette conique variable, est une droite* H *passant par ce même point de rencontre. Les quatre droites* D, A, H, B *forment un faisceau harmonique.*

THÉORÈME III. *Si trois coniques sont inscrites dans un même angle, et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes, les deux tangentes menées à une même conique couperont la polaire du sommet de l'angle, relativement à cette conique, en deux points; et si l'on joint au sommet de l'angle les six points de rencontre ainsi obtenus, on aura un faisceau en involution.*

2. *Coniques biconfocales.* Une conique ayant deux foyers fixes peut être considérée comme tangente à quatre droites fixes; les théorèmes relatifs aux coniques biconfocales peuvent donc être étendus aux coniques inscrites dans un même quadrilatère. Je citerai quelques exemples de cette transformation.

Soient trois coniques biconfocales; par un point extérieur menons-leur six tangentes. Ces tangentes auront deux à deux la même bissectrice; donc elles formeront un faisceau en involution. En généralisant par homographie, on obtiendra la proposition suivante, corrélative d'un théorème de M. Sturm :

Si trois coniques sont inscrites dans un même quadrilatère, et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes, ces six tangentes formeront un faisceau en involution.

Le problème suivant : *Construire une conique inscrite dans un quadrilatère et passant par un point donné* A, a en général deux solutions.

Si au point A on mène les deux tangentes aux deux coniques satisfaisant à la question, et qu'on joigne ce point à deux sommets opposés du quadrilatère, on obtiendra un faisceau harmonique.

3°. Considérons n coniques situées dans un même plan, les $4n$ foyers de ces coniques seront $4n$ sommets de n quadrilatères respectivement circonscrits à ces courbes, et les côtés opposés de ces quadrilatères convergeront tous vers deux mêmes points P et Q situés sur la *droite de l'infini* (*).

Observation. Chaque côté renferme un foyer réel et un foyer imaginaire.

Il suit de là que :

Si l'on transforme homographiquement n coniques situées dans un même plan, aux foyers de ces coniques correspondront les sommets de n quadrilatères respectivement circonscrits à ces coniques transformées, et les côtés opposés de ces quadrilatères se couperont en deux mêmes points P *et* Q *situés sur la droite, répondant homographiquement à celle de l'infini.*

Inversement, cette remarque peut servir à résoudre ce problème :

Deux points A *et* B *étant pris dans le plan d'une conique, transformer la figure homographiquement, en sorte que les points correspondant à* A *et* B *soient des foyers de la conique transformée.*

On peut remarquer, de plus, que si un cercle se trouve dans le plan des coniques données, il se transforme suivant une conique passant par les deux points fixes P et Q.

(*) Expression employée par M. Poncelet

Comme application de ce principe, considérons trois coniques inscrites dans un même angle; si nous joignons le sommet de cet angle aux douze foyers de ces coniques, nous obtiendrons ainsi six couples de droites ayant une bissectrice commune; donc trois quelconques d'entre elles forment un faisceau en involution.

On tire de là le théorème suivant :

Théorème IV. *Si trois coniques sont inscrites dans un même angle* A, *et que par deux points extérieurs* P *et* Q *on leur mène des tangentes, les tangentes menées de ces deux points à une même conique formeront un quadrilatère donnant deux couples de sommets opposés, et nous aurons, en considérant les trois coniques, six couples de sommets; en joignant trois quelconques de ces couples au sommet* A, *on obtiendra un faisceau en involution.*

II.

Les deux droites représentées par les équations

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0$$

et

$$(y-\beta)-\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0,$$

que nous avons considérées dans l'étude des foyers des coniques (t. XI, p. 290), jouissent d'une propriété très-remarquable, contenue dans la proposition suivante :

Si un angle constant tourne autour du point (α, β), *ses côtés et les droites représentées par les équations*

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0,$$
$$(y-\beta)-\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0,$$

forment dans chaque position de l'angle mobile un faisceau dont le rapport anharmonique est constant. Si l'angle mobile est droit, le faisceau est harmonique.

Les conséquences de ce principe sont nombreuses. Considérons un angle constant tournant autour du foyer d'une conique, les cordes interceptées dans la conique enveloppent deux coniques confocales et doublement tangentes à la première.

On tire de cette proposition le théorème suivant :

THÉORÈME V. *Si un angle* O *est circonscrit à une conique, et qu'un angle variable tourne autour du point* O *de manière que ses côtés fassent dans chacune de ses positions, avec les côtés de l'angle fixe, un faisceau dont le rapport anharmonique soit constant, les cordes interceptées dans la conique par les côtés de l'angle variable enveloppent deux coniques inscrites dans l'angle* O *et doublement tangentes à la première.* (CHASLES, *Géométrie supérieure,* page 448.)

Je citerai encore les théorèmes suivants :

THÉORÈME VI. *Si un angle variable tourne autour d'un point fixe* O *pris dans le plan d'une conique, en sorte que ses côtés fassent constamment, avec deux droites passant par ce point, un faisceau harmonique, les cordes interceptées dans la conique par les côtés de l'angle variable enveloppent deux coniques.*

Si le point O est sur la conique, la corde interceptée passe par un point fixe.

THÉORÈME VII. *Si un angle variable tourne autour d'un point pris sur une conique, en sorte que ses côtés fassent constamment, avec deux droites passant par ce point, un faisceau dont le rapport anharmonique soit constant, la corde interceptée dans la conique par l'angle variable enveloppe une autre conique doublement tangente à la première au point* O. (CHASLES, *Géométrie supérieure,* page 450) (*).

(*) Ces théorèmes m'ont été communiqués avant la publication de la *Géométrie supérieure.*

Dans ce qui précède, nous sommes partis d'un théorème particulier pour nous élever au théorème général; mais il arrive souvent que ce dernier est plus simple et plus facile à démontrer; alors on peut en tirer le théorème particulier.

On verra un exemple de cette méthode dans ce qui va suivre.

III.

Définition. Soit un point α, β pris dans le plan d'une conique, les droites représentées par

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0, \quad (y-\beta)-\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0$$

couperont la conique en quatre points donnant deux cordes réelles. Quoique les théorèmes suivants s'appliquent aussi aux cordes imaginaires, nous ne considérerons que les premières; pour abréger, je les nommerai les *droites directrices* du point α, β. Soient $X=0$ et $Y=0$ les équations de ces deux droites, l'équation de la conique pourra se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda XY;$$

donc :

Théorème VIII. *Le carré de la distance d'un point de la conique à un point fixe α, β est au produit des distances de ce même point aux deux droites directrices correspondantes, dans un rapport constant.*

Remarque. Si le point F coïncide avec l'un des foyers de la conique, les deux droites directrices se confondent toutes deux avec la directrice correspondante.

Si la conique est un cercle, une des droites directrices est toujours à l'infini.

Considérons une conique dans un plan, et soient A, A′, B, B′ quatre points pris arbitrairement sur cette conique; menons la droite AA′ et joignons un point quelconque de la conique aux quatre points A, A', B, B'; nous obtiendrons ainsi quatre droites coupant la corde AA' aux quatre points A, A', b, b', et si nous joignons ces quatre points à un point fixe O pris dans le plan, les quatre droites AO, $A'O$, bO, $b'O$ forment un faisceau dont le rapport anharmonique sera constant.

Maintenant, si nous transformons homographiquement cette figure, en sorte que les deux droites OA et OA' se projettent suivant les droites dont les équations sont

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0, \quad (y-\beta)-\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0,$$

α et β étant les coordonnées du point correspondant au point O, on obtiendra le théorème suivant :

Théoreme IX. *Soient* F *un point fixe pris dans le plan d'une conique,* A *et* A' *deux points pris sur cette conique; un angle dont les côtés passent constamment par les points* A *et* A', *et dont le sommet se meut sur la conique, intercepte sur une des droites directrices correspondant au point* F *un segment vu de ce point sous un angle constant.*

Remarque. Ce théorème a encore lieu quand le point F coïncide avec l'un des foyers de la conique; je ferai remarquer que, dans ce cas, l'angle constant est la moitié de l'angle AFA'.

Si les points A, A' et le pôle de la droite directrice que l'on considère sont en ligne droite, l'angle constant est droit.

Parmi les applications que l'on peut faire du théorème précédent, je citerai la suivante :

Trois segments étant donnés sur une droite, déterminer le point du plan d'où ces trois segments sont vus sous le même angle.

Ce problème peut se résoudre au moyen de la règle et du compas.

4. Problème. *Un système d'angles* A, B, C, etc., *situés dans un plan, étant liés par une équation quelconque* F (A, B, C,...) = o, *trouver la relation qui lie les angles correspondants* A′, B′, C′, etc., *quand on transforme la figure homographiquement.*

Solution. Soient P, Q les deux points correspondant, sur la seconde figure, aux deux points qui, dans la première figure, sont situés respectivement sur la droite de l'infini et sur les deux droites $y = xi$, $y = -xi$.

Les deux côtés de l'angle A′ dans la seconde figure et les droites A′P, A′Q formeront un faisceau dont nous désignerons le rapport anharmonique par a; désignons de même par b, c, d, etc., les rapports correspondant aux autres angles, la relation cherchée est

$$(1) \qquad F\left(\frac{\log a}{2\sqrt{-1}}, \quad \frac{\log b}{2\sqrt{-1}}, \quad \frac{\log c}{2\sqrt{-1}} \cdots\right) = o,$$

la caractéristique log désignant des logarithmes népériens.

N. B. M. Chasles, dans sa *Géométrie supérieure*, page 446, § 623, ne donne la solution de ce problème que quand les angles A, B, C, etc., ont même sommet ou quand ils sont égaux.

On pourrait se proposer la même question pour un système d'angles situés d'une manière quelconque dans l'espace; mais la question est alors plus complexe et demande quelques développements que nous ne pouvons donner ici.

Remarque. Il suit de là que toute relation entre des angles est projective; pour ne donner qu'un exemple, nous prendrons ce théorème élémentaire :

La somme des angles d'un polygone plan est un multiple de deux droits.

Si on le transforme homographiquement au moyen du problème précédent, on trouvera le théorème de Carnot relatif aux segments qu'une transversale intercepte sur les côtés d'un polygone.

Je ne m'arrêterai pas sur les conséquences que l'on en peut tirer pour les polygones inscrits ou circonscrits aux coniques, et notamment aux théorèmes que M. Poncelet a donnés à ce sujet dans ses *Propriétés projectives*.

Nous donnerons prochainement les démonstrations de ces diverses propositions et du théorème suivant :

5. Théorème X. (Nous appelons ici *foyers d'une surface de révolution du second ordre* les deux foyers communs à toutes les sections faites suivant l'axe.) — *Le lieu des foyers des surfaces de révolution circonscrites à une surface du second ordre est un système de trois coniques situées dans les trois plans principaux de la surface* (*).

On déduit comme corollaire le théorème de M. Steiner sur les sommets des cônes de révolution circonscrits à un ellipsoïde.

6. Théorème XI. *Soit un cône circonscrit à une surface du second ordre; tout plan cyclique du cône coupera la surface suivant une conique dont le sommet du cône sera un foyer.*

Nous joignons ici un exemple pour éclaircir la formule (1) (p. 64).

7. Soient un cercle et deux points A et B pris arbitrairement sur ce cercle, M un point quelconque de la circonférence, et O son centre; on aura

$$2.\widehat{AMB} = \widehat{AOB}.$$

Si nous transformons la figure homographiquement, le cercle se projettera suivant une conique, le point O se projette en O', et, comme il est facile de le voir, les points P

(*) Ce sont les courbes *polaires* de M. Chasles.

et Q seront les points de contact des tangentes menées à cette conique par le point O′; A et B se projetteront en A′ et B′. Cela posé, joignons les points A′ et B′ au point O′, et appelons a le rapport anharmonique du faisceau O′P, O′A′, O′B′, O′Q (en regardant les droites OP et OQ comme conjuguées).

Joignons les quatre points A′, B′, P, Q à un point quelconque M de la conique, et appelons b le rapport anharmonique du faisceau MA′, MP, MB′, MQ (en regardant les droites MP et MQ comme conjuguées); d'après la formule (1), nous devons avoir

$$2\left(\frac{\log b}{2\sqrt{-1}}\right) = \frac{\log a}{2\sqrt{-1}},$$

ou

$$2\log b = \log a,$$

et en passant des logarithmes aux nombres,

$$b^2 = a;$$

d'où le théorème suivant :

Si quatre points conjugués deux à deux sont sur une conique, le rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces points sont vus du pôle de la droite qui joint deux points conjugués est égal au carré du rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces quatre points sont vus d'un point quelconque de la conique.