NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DIEU

Concours d’agrégation aux lycées, années 1842 et 1848

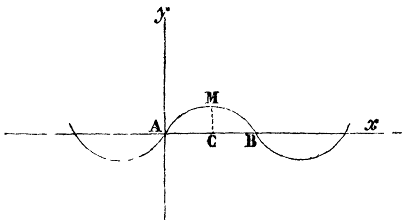
Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 49-56
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__49_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉES 1842 ET 1848 (*);

PAR M. DIEU,
Agregé, docteur ès sciences.

1848. — COMPOSITION D'ANALYSE.

Parmi toutes les courbes planes de même longueur l, qui se terminent à deux points donnés A, B, *déterminer celle qui a le plus grand moment d'inertie par rapport à* AB. *Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe et la droite* AB, *ainsi que l'aire de la surface qui serait engendrée par la courbe si elle tournait autour de cette droite en faisant une révolution complète.*



AB étant prise pour axe des x, et la perpendiculaire en A pour axe des y, le moment d'inertie dont il s'agit est représenté par $\int_0^l y^2 ds$, et, d'après les principes du

(*) La même courbe repond au problème de mécanique de 1842 et au problème d'analyse de 1848; c'est pour cela que nous les avons réunis.

calcul des variations, la courbe demandée doit être déterminée au moyen de l'équation

$$\delta . \int_0^l (y^2 - \lambda)\, ds = 0,$$

λ étant une constante qui dépend de la longueur donnée l.

En intervertissant l'ordre des opérations indiquées par les signes δ et $\int$, et faisant, pour plus de facilité, varier x et y, on déduit de cette équation

$$\int_0^l \left\{ \delta y \left[2y + \mathrm{D}_s . (\lambda - y^2) \frac{dy}{ds} \right] + \delta x . \mathrm{D}_s . (\lambda - y^2) \frac{dx}{ds} \right\} ds = 0,$$

attendu que δx et δy sont nulles aux limites.

Suivant les principes auxquels nous venons de renvoyer, on a une équation différentielle de la courbe demandée, en posant

$$\mathrm{D}_s . (\lambda - y^2) \frac{dx}{ds} = 0.$$

On peut égaler à zéro soit le coefficient de δx, soit celui de δy, car les deux équations ainsi formées rentrent l'une dans l'autre; il faut choisir la moins compliquée.

Une première intégration donne

$$c \frac{ds}{dx} = \lambda - y^2,$$

c étant une constante arbitraire; et l'on tire facilement de cette équation

$$(1) \qquad c \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{(\lambda - y^2)^2 - c^2}.$$

Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer :

1°. Qu'à cause du double signe dont le radical est affecté, et de ce que la quantité sous le radical ne contient que c^2, il suffit de supposer $c > 0$;

2°. Que λ^2 doit surpasser c^2 pour que de très-petites valeurs de y ne rendent pas $\frac{dy}{dx}$ imaginaire;

3°. Que λ ne peut être négative, parce que, dx étant positive quand x croît de zéro à AB et y^2 étant nécessairement croissant à partir de zéro, si λ était négative, le radical croîtrait toujours et dy ne changerait pas de signe, attendu qu'il n'y aurait aucune raison pour passer d'un signe à l'autre devant le radical; de sorte que y ne pourrait devenir nulle pour $x = \mathrm{AB}$, tandis qu'il faut au contraire que cela ait lieu.

Il résulte de ces remarques que la valeur $\sqrt{\lambda - c}$ est un maximum de y qui ne peut la dépasser en croissant à partir de zéro, sans que $\frac{dy}{dx}$ ne devienne imaginaire. On posera, par conséquent,

$$(2) \qquad y = \sqrt{\lambda - c} \,.\, \sin \varphi.$$

En substituant cette expression à y dans l'équation (1), on obtient

$$dx = \frac{c}{\sqrt{\lambda + c}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\lambda - c}{\lambda + c} \sin^2 \varphi}},$$

si l'on regarde φ comme croissant à partir de zéro, et si l'on convient de passer du $+$ au $-$ devant le radical de l'équation (1) lorsque y passe par sa valeur maximum qui répond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Puis on a

$$(3) \qquad x = \frac{c}{\sqrt{\lambda + c}} \,.\, \mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}, \varphi\right),$$

F étant la caractéristique de la fonction elliptique de première espèce.

D'après la valeur précédente de dx, l'équation

$$ds = \frac{\lambda - y^2}{c}\, dx$$

devient

$$ds = \sqrt{\lambda + c}\,.\,d\varphi\,.\sqrt{1 - \frac{\lambda - c}{\lambda + c}\sin^2\varphi} - dx,$$

et l'on a

$$s = \sqrt{\lambda + c}\,.\,\mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}},\, \varphi\right) - x,$$

E étant la caractéristique de la fonction elliptique de seconde espèce; ainsi la rectification de la courbe cherchée se ramène à celle de l'ellipse dont les demi-axes sont $\sqrt{\lambda + c}$ et $\sqrt{2c}$.

y devient nulle pour $\varphi = \pi$; donc on doit avoir

$$\frac{2c}{\sqrt{\lambda + c}}\,.\,\mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}\right) = \mathrm{AB},$$

et

$$2\sqrt{\lambda + c}\,.\,\mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}\right) = l - \mathrm{AB},$$

ce qui détermine λ et c (*).

Les valeurs de y et de dx donnent

$$y\,dx = \frac{c \sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\frac{\lambda + c}{\lambda - c} - \sin^2\varphi}},$$

et en intégrant cette expression depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$, on trouve, pour l'aire de la portion de plan com-

(*) On emploie encore ici les notations de Legendre; les fonctions F et E ont, comme on sait, pour $\varphi = \pi$, des valeurs doubles de celles qu'elles ont pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et ces dernières sont exprimées par $\mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}\right)$, $\mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}\right)$ pour le module $\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}$.

prise entre la courbe et AB,

$$c\left[\log\left(\sqrt{\lambda+c}+\sqrt{\lambda-c}\right)^2-\log 2c\right].$$

La différentielle de l'aire de la surface engendrée par la courbe tournant autour de AB est $2\pi y\,ds$; or les valeurs de y et de ds en fonction de φ donnent

$$2\pi y\,ds = 2\pi(\lambda-c)\frac{\frac{c}{\lambda-c}+\cos^2\varphi}{\sqrt{\frac{2c}{\lambda-c}+\cos^2\varphi}}.\sin\varphi\,d\varphi;$$

et, en intégrant entre les limites qui viennent d'être indiquées, on a

$$2\pi\sqrt{\lambda^2-c^2},$$

pour l'aire de la surface de révolution dont il s'agit.

Enfin, on a encore

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2\sqrt{\lambda-c}}{c^2}\left[\lambda-(\lambda-c)\sin^2\varphi\right]\sin\varphi.$$

Rien n'est plus facile que de se faire, d'après les expressions de x, y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de la variable auxiliaire φ, une idée exacte, tant de l'arc limité à A et B qui répond à la question, que de toute la courbe qui satisfait à l'équation (1). En effet :

1°. φ croissant de o à π, x croît de o à AB, y croît d'abord de o à $\sqrt{\lambda-c}$ $\left(\text{maximum qui répond à } x=\frac{\text{AB}}{2}\right)$, puis décroît jusqu'à o, $\frac{dy}{dx}$ décroît de $\frac{\sqrt{\lambda^2-c^2}}{c}$ à $-\frac{\sqrt{\lambda^2-c}}{c}$, en passant par zéro quand $x=\frac{\text{AB}}{2}$, et $\frac{d^2y}{dx^2}$ reste constamment négative;

2°. y a la même valeur et $\frac{dy}{dx}$ des valeurs de signes contraires pour des valeurs de φ équidifférentes de $\frac{\pi}{2}$ auxquelles répondent des valeurs de x équidifférentes de $\frac{AB}{2}$.

3°. Enfin $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_1 + k\pi$, φ_1 étant entre zéro et π, et k un nombre entier positif ou négatif, donnent des valeurs de x qui diffèrent entre elles de $k\pi$, et des valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui sont égales et de même signe, ou égales et de signes contraires suivant que k est pair ou impair.

Donc :

L'arc AMB *est concave vers sa corde* AB, *et formé de deux parties symétriques par rapport à l'ordonnée* CM *de son milieu* M.

La courbe est composée d'une infinité de parties égales à AMB, *situées les unes du côté des y positives, les autres du côté des y négatives, comme une sinusoïde, et les points tels que* A, B, *etc., sont en même temps des centres et des points d'inflexion.*

1842. — Composition de mécanique.

Démontrer qu'un fil flexible homogène et sans masse peut tourner autour de la droite qui joint ses extrémités fixes, en conservant une figure permanente, et déterminer cette figure; on fait abstraction de la résistance de l'air et des frottements.

Soient A, B les extrémités fixes du fil; s'il tournait effectivement autour de AB, en conservant une figure constante AMB, ses points décriraient des circonférences dont AB serait l'axe commun, et ils auraient tous, au même instant, la même vitesse angulaire, qui ne varierait pas, d'ailleurs, avec le temps, puisqu'il n'y a pas de forces appliquées. Or, chaque sommet du polygone infinitésimal qu'il est permis de substituer à la courbe dans le raisonnement, peut être considéré comme un point libre, si on lui applique à chaque instant une force égale à la résultante des tensions des côtés contigus; et cette force ne diffère pas de la force centripète due au mouvement circulaire uniforme du sommet autour de AB; de sorte que sa direction, qui est comprise dans le plan osculateur, coupe cette droite. Donc le deuxième élément de la courbe, à partir de A, est dans le plan du premier et de AB; le troisième dans le plan du deuxième et de AB; et ainsi de suite. Ainsi, *la figure* AMB *est plane*, en admettant qu'elle existe.

Si l'on désigne par T la tension du fil au point (x, y), par s la longueur de la partie qui est entre ce point et l'extrémité A, enfin par ω la vitesse angulaire constante de tous les points autour de AB; et si l'on prend pour axe des x la droite AB, et pour axe des y la perpendiculaire élevée en A à cette droite dans le plan mobile AMB; les composantes, suivant les axes de la force qu'il suffirait d'appliquer à (x, y) pour pouvoir considérer ce point comme libre, sont représentées par $D_s . T\dfrac{dx}{ds}$, $D_s . T\dfrac{dy}{ds}$, et celles de la force centripète par o, $-\omega^2 y$. Si la courbe AMB existait, on aurait donc, d'après ce qui précède, les deux équations

$$D_s . T\frac{dx}{ds} = o, \quad D_s . T\frac{dy}{ds} + \omega^2 y = o;$$

et, réciproquement, le théorème énoncé sera démontré si l'on peut avoir une courbe qui satisfasse à l'équation déduite de celles-ci par l'élimination de T, et qui passe en A, B.

De la première de ces deux équations on déduit immédiatement

(1) $$T = c_1 \frac{ds}{dx},$$

c_1 désignant une constante arbitraire.

En effectuant les dérivations qui ne sont qu'indiquées, multipliant ensuite par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ respectivement, puis ajoutant, on a

$$\frac{dT}{ds} + \omega^2 y \frac{dy}{ds} = 0,$$

dont l'intégrale est

(2) $$T = c_2 - \frac{\omega^2}{2} y^2,$$

en désignant par c_2 une seconde constante arbitraire.

Enfin, par l'élimination de T entre les équations (1) et (2), il vient

$$c \frac{ds}{dx} = \lambda - y^2,$$

si l'on remplace c_1 par $c\frac{\omega^2}{2}$, et c_2 par $\lambda\frac{\omega^2}{2}$.

Or cette équation est identique à la première des équations différentielles qu'on a eues pour la courbe du problème précédent; donc le théorème dont il s'agit maintenant est démontré, ainsi que cela a été annoncé plus haut, puisque non-seulement on peut faire passer la courbe par les points A, B, mais encore l'astreindre à une autre condition quelconque.

Il convient de remarquer qu'il peut y avoir de A à B deux, ou même un nombre quelconque d'arcs tels que AMB.