Nouvelles annales de mathématiques

Théorème de minimum, dans le tétraèdre, de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 47-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__47_1>

THÉORÈME DE MINIMUM, DANS LE TÉTRAÈDRE, DE M. STEINER.

1. *Lemme.* a est un point fixe, D une droite sur laquelle on prend deux points b, c; la distance bc est

constante ; le périmètre du triangle abc est un minimum lorsque $ab = ac$, ou, ce qui revient au même, lorsque le milieu de bc est le pied de la perpendiculaire abaissée de a sur bc.

2. Théorème. *Sur la droite* A *sont situés deux points fixes a, b ; sur la droite* B, *on prend deux points c, d ; la distance cd est constante ; l'aire de la pyramide $abcd$ est un minimum lorsque le milieu de cd est le point ou la plus courte distance entre* A *et* B *rencontre* B. (Steiner.)

Démonstration. acd, bcd, cab, dab sont les quatre faces de la pyramide. Les aires acd, bcd sont constantes ; il s'agit donc de chercher en quel cas la somme des aires cab et dab est un minimum, ou dans quel cas la somme des perpendiculaires abaissées de c et d sur A devient un minimum. A cet effet, par un point quelconque e pris sur A, menons un plan perpendiculaire sur A, et projetons sur ce plan les points c, d en c', d' ; la distance $c'd'$ est constante ; et les droites ec', ed' sont évidemment égales aux perpendiculaires abaissées de c et d sur A. Or, d'après le lemme, $ec' + ed'$ est un minimum lorsque le milieu e' de $c'd'$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de e sur $c'd'$; alors ee' est la projection de la plus courte distance ; donc, etc.

3. *Corollaire.* Prenant sur deux droites deux longueurs constantes, et considérant ces longueurs comme les arêtes opposées d'un tétraèdre, le volume du tétraèdre est constant et son aire est un minimum, lorsque la plus courte distance des deux droites partage les deux longueurs en parties égales, et le rayon de la sphère inscrite est un maximum.