NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOSEPH SACCHI

Solution de la question 274

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 462-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__462_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 274

(voir p. 259);

PAR M. JOSEPH SACCHI,
Professeur à Pavie.

1. Soient

$$A_r x + B_r y + C_r z = D,$$

le $r^{\text{ième}}$ plan donné, et

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \omega$$

le plan mobile P, les coordonnées sont rectangles; la condition $\sum_1^n \alpha_r \cos \alpha_r = h$ constante deviendra

$$\sum_1^n a_r \frac{\alpha A_r + \beta B_r + \gamma C_r}{R . R_1} = h,$$

ou bien

$$\frac{p\alpha + q\beta + m\gamma}{R} = h,$$

où

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad R_1 = \sqrt{A_r^2 + B_r^2 + C_r^2},$$

$$p = \sum_1^n \frac{a_r A_r}{R_1}, \quad q = \sum_1^n \frac{a_r B_r}{R_1}, \quad m = \sum_1^n \frac{a_r C_r}{R_1}.$$

Cette équation équivaut à

$$\frac{\alpha \frac{p}{m} + \beta \frac{q}{m} + \gamma}{R\sqrt{\frac{p^2}{m^2} + \frac{q^2}{m^2} + 1}} = \frac{h}{\sqrt{p^2 + q^2 + m^2}},$$

ou bien

(1) $$\sin (P, D) = \frac{h}{\sqrt{p^2 + q^2 + m^2}},$$

où D représente la droite qui a pour équations

$$x = \frac{p}{m} z, \quad y = \frac{q}{m} z.$$

Donc le plan mobile forme un angle constant avec la droite D, et si dans son mouvement il se maintient toujours à la même distance d'un point fixe, il engendre un cône droit ayant pour axe la parallèle à la droite D passant par le point fixe ; variant h, le cône change, mais la position de l'axe est constante. Le minimum et le maximum de la valeur de h, que l'équation (1) donne, sont évidemment zéro et $\sqrt{p^2 + q^2 + m^2}$: dans le premier cas, le cône devient un cylindre ayant le même axe que le cône; et dans le second, il se réduit au même plan mobile perpendiculaire à la droite D. Si les a_r représentaient les aires de figures placées dans les plans donnés, h serait la somme des projections des mêmes aires sur le plan mobile, et les plans tangents du susdit cône seraient les mêmes pour lesquels h est constant, et le plan perpendiculaire à la droite D celui du maximum de la somme des projections (*).

2. Prenant pour origine des coordonnées le point fixe, l'équation du plan mobile distant de b de l'origine sera

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - b\mathrm{R} = 0,$$

et

$$\alpha p + \beta q + \gamma m - h\mathrm{R} = 0$$

sera la condition donnée. Si nous représentons ces équations par $\varphi = 0$, $f = 0$, on a, pour les équations de l'enveloppe,

$$\varphi'_\alpha f'_\beta - f'_\alpha \varphi'_\beta = 0, \quad \varphi'_\gamma f'_\alpha - f'_\gamma \varphi'_\alpha = 0, \quad \varphi'_\beta f'_\gamma - f'_\beta \varphi'_\gamma = 0,$$

ou

$$\varphi'_\alpha = \frac{d\varphi}{d\alpha}, \ldots.$$

(*) Plan invariable de Laplace. TM.

Effectuant les calculs et posant

$$qx - py = \mathrm{E}, \quad mx - pz = \mathrm{F}, \quad my - qz = \mathrm{G},$$
$$bp - hx = e, \quad bq - hy = f, \quad bm - hz = q,$$

on a

$$\mathrm{RE} = \alpha f - \beta e, \quad \mathrm{RF} = \gamma e - \alpha g, \quad \mathrm{RG} = \beta g - \gamma f,$$

lesquelles, carrées et sommées, donnent l'équation du cône

$$\mathrm{E}^2 + \mathrm{F}^2 + \mathrm{G}^2 = e^2 + f^2 + g^2,$$

ou bien

$$(px + qy + mz - hb)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 - b^2)(p^2 + q^2 + m^2 - h^2),$$

laquelle confirme justement tout ce qu'on a dit ci-dessus. Le cas de $b = 0$ correspond à la question comme elle a été proposée par M. Steiner.

Note du Rédacteur. Ce problème se ramène à la théorie des couples en statique, et *vice versâ*.