

HERMITE

Un théorème de Fermat

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 12
(1853), p. 45-46

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__45_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME DE FERMAT ;

D'APRÈS M. HERMITE.

(Journal de Mathématiques, tome XIII, page 15; 1848.)

1. *Lemme.* Lorsqu'un nombre premier est de la forme $4k + 1$, il existe un carré qui, augmenté de 1, donne une somme divisible par ce nombre premier.

2. *Lemme.* Le nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ étant converti en fraction continue, on trouve toujours deux réduites consécutives dont les dénominateurs sont, l'un inférieur, et l'autre supérieur à \sqrt{b} .

3. THÉORÈME DE FERMAT. *Un nombre premier de la forme $4k + 1$ est toujours la somme de deux carrés.*

Démonstration. Soit p ce nombre premier, on a donc (*lemme 1*)

$$a^2 + 1 = p;$$

$\frac{a}{p}$ étant converti en fraction continue, on arrive à deux réduites consécutives $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, où $n < \sqrt{p}$ et $n' > p$ (*lemme 2*). Donc, d'après la théorie connue,

$$\frac{a}{p} = \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{nn'} \quad \text{où } \varepsilon < 1;$$

on en déduit

$$na - mp = \varepsilon \cdot \frac{p}{n'},$$

$$(na - mp)^2 = p \cdot \frac{p}{n'^2} \cdot \varepsilon^2;$$

$\frac{p}{n^2}$ et ε^2 sont des fractions; donc

$$(na - mp)^2 < p;$$

mais

$$n^2 < p;$$

donc

$$(na - mp)^2 + n^2 < 2p,$$

ou bien

$$n^2(a^2 + 1) - p(2anm - m^2p) < 2p.$$

$a^2 + 1$ est un multiple de p , l'expression à gauche est donc un multiple de p moindre que $2p$. Donc

$$(na - mp)^2 + n^2 = p. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

4. Euler a démontré que la décomposition du nombre premier $p = 4 + 1$ ne peut se faire que d'une seule manière (*voir* tome VII, page 38); et, d'après la formule de Gauss (*voir* tome IX, page 307), lorsqu'un nombre ne peut se décomposer que d'une seule manière en deux carrés, il est premier.
