Concours d’admission à l’École polytechnique en 1853 (voir p. 226)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 449-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__449_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, EN 1853

(voir p. 226).

Épreuve graphique. — Questions proposées.

Quinze questions ont été proposées à ce concours : quatorze sur les intersections de surfaces, une sur les plans tangents.

Les trois premières, relatives aux sections planes d'un cylindre et d'un cône, conduisent à un résultat tout à fait analogue à un cadran solaire. Les deux suivantes, 4 et 5, traitent le cas de l'intersection de deux surfaces coniques suivant des branches infinies, hyperboliques ou paraboliques.

Les questions 6, 7, 8, 9 et 10, tout en partant des mêmes données, présentent une grande variété dans les résultats : intersection de deux cylindres suivant des courbes fermées, intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution, sections planes, etc.

Les questions 11, 12 et 13, avec des données très-différentes des précédentes, ramènent le dessinateur à la rencontre de deux cylindres, aux trous cylindriques percés dans une sphère, etc.

La quatorzième considère trois surfaces se coupant deux à deux. Dans cette question, ainsi que dans quelques autres, on demande aux élèves de construire séparément le solide commun aux corps qui se rencontrent. Nous croyons cet exercice très-bon et très-propre à rendre familière la lecture des projections.

En résumé, le concours de 1853 offre des questions très-variées et cependant d'un degré de difficulté graphique à peu près le même; mérite qui avait manqué au concours de 1852.

Intersections de surfaces.

1. *Données.* Un cylindre vertical, tangent au plan vertical et placé en avant de ce plan. Le rayon de la base est de 5 centimètres, la hauteur est indéfinie.

Nommons *plan principal* le plan mené par l'axe, perpendiculairement à la ligne de terre. Dans ce plan, sur le cylindre, en dehors du plan vertical, un point (C.C') est donné; il est à 10 centimètres au-dessus du plan horizontal.

Dans ce même plan, une droite part du point (C.C') et va rencontrer le plan horizontal en (D.D'), à 8 centimètres en avant du cylindre.

Il s'agit : 1° de faire passer par le point (C.C') un plan perpendiculaire à la droite (CD.C'D') et de décrire dans ce plan, du point (C.C') comme centre et avec un rayon de 4 centimètres, une circonférence de cercle; 2° de diviser cette circonférence en douze parties égales à partir du plan principal (point zéro), en les numérotant 1, 2, 3, etc., de gauche à droite; 3° de construire l'intersection du cylindre par le plan que détermine la droite (CD.C'D') et le point n° 1; puis, si le temps le permet, de refaire les mêmes opérations pour les n^{os} 2 et 3.

2. *Données.* Les mêmes que celles de la première question, à l'exception du *plan principal* qui est remplacé par un plan faisant un angle de 67° 30' avec le plan vertical de projection. Même travail graphique.

3. *Données.* Qu'on substitue au cylindre de la question précédente un cône droit vertical; au *plan principal,* un plan incliné de 67° 30' sur le plan vertical de projection, et l'on a l'énoncé de la troisième question.

4. *Données*. Sur le plan horizontal, une ellipse et un cercle touchant l'ellipse intérieurement et la coupant en deux points. Le grand axe de l'ellipse = 9 centimètres, le petit axe = 6 centimètres : ces axes ne sont ni perpendiculaires ni parallèles à la ligne de la terre.

Un point dont la projection horizontale S tombe dans le cercle et dans l'ellipse, et dont la projection verticale S′ est élevée de 10 centimètres environ au-dessus du plan horizontal ;

Deux cônes indéfiniment prolongés, ayant le point (S.S′) pour sommet commun, et pour bases respectives l'ellipse et le cercle ;

Une droite indéfinie passant par le point (S.S′) et rencontrant le plan horizontal en un point (R.R′) plus éloigné de la ligne de terre que ne l'est le point S.

Il s'agit de déplacer le cône à base circulaire parallèlement à lui-même, en faisant monter ou descendre son sommet sur la droite (SR.S′R′), d'arrêter ce cône dans une certaine position, et de construire le résultat de son intersection avec le cône elliptique. On arrêtera le sommet du cône auxiliaire au-dessus du point (S.S′), au tiers de la longueur de la droite (SR.S′R′).

5. *Données*. On substitue à l'ellipse et au cercle se touchant intérieurement et se coupant en deux points, une ellipse et un cercle se coupant en quatre points, et l'on a l'énoncé de la cinquième question.

6. *Données*. Un point (O.O′), situé à 10 centimètres de chacun des plans de projection, est le centre commun d'une sphère S de 4 centimètres de rayon, et d'un cercle horizontal *c* de 2 centimètres de rayon ;

Dans le plan horizontal, le point O est le centre d'un cercle C de 8 centimètres de rayon ;

Une droite (D.D′) part d'un point de la circonférence du cercle C et touche le cercle *c*, de manière à avoir sa projection horizontale tangente à celle du cercle (on ne prendra pas cette droite parallèle au plan vertical de projection).

Il s'agit de circonscrire un cylindre à la sphère S et de construire l'intersection de ce cylindre avec le cylindre de révolution ayant la droite (D.D′) pour axe et 2 centimètres de rayon.

Nota. On donnera au cylindre circonscrit à la sphère une direction telle que l'intersection des deux cylindres (pénétration ou arrachement) ne se réduise pas à des droites, et qu'elle soit convenablement disposée.

7. *Données.* Les mêmes que celles de la question précédente.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection de la sphère S par le cylindre de révolution ayant pour axe la droite (D.D′) et 2 centimètres de rayon; 2° de mener au cylindre deux plans tangents parallèles entre eux et non perpendiculaires à l'un ou à l'autre des plans de projection, et de construire les cercles suivant lesquels ces plans coupent la sphère.

8. *Données.* Les mêmes que celles des sixième et septième questions.

Il s'agit : 1° de percer dans la sphère S le trou qu'y ferait un cylindre de révolution ayant pour axe la droite (D.D′) et 2 centimètres de rayon; 2° de faire une coupe de la sphère et de son trou cylindrique par un plan vertical passant par l'axe du cylindre.

Nota. Le cylindre sera tracé en pointillé, sans distinction de parties vues ou cachées, et la coupe verticale sera reportée parallèlement à elle-même jusqu'à 10 centimètres environ de la position donnée, puis rabattue sur le plan horizontal.

On tracera des hachures au crayon sur la partie solide du trou, la partie de la sphère antérieure au plan coupant étant supposée enlevée.

9. *Données*. Les mêmes que celles des trois questions précédentes.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection de la sphère S avec le cylindre de révolution ayant pour axe la droite (D.D′) et 2 centimètres de rayon; 2° de mener deux plans tangents au cylindre, par un point P distant de 15 centimètres environ du centre de la sphère et de chacun des plans de projection; 3° de construire les cercles suivant lesquels ces plans tangents coupent la sphère.

10. *Données*. Celles des questions 6, 7, 8 et 9.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection de la sphère S par le cylindre de révolution ayant pour axe la droite (D.D′) et 2 centimètres de rayon; 2° de construire séparément les projections du solide commun à la sphère et au cylindre.

Nota. Afin de bien représenter le solide dont il s'agit, on déterminera sur la surface de ce solide un certain nombre de génératrices du cylindre et de circonférences provenant de sections faites dans la sphère par des plans perpendiculaires à la droite (D.D′).

11. *Données*. Un point (O.O′), situé à 10 centimètres de chacun des plans de projection, est le centre d'une sphère S de 4 centimètres de rayon et d'un cercle horizontal c dont le rayon a 1 centimètre $\frac{1}{2}$;

Dans le plan horizontal, le point O est le centre d'un cercle C de 8 centimètres de rayon, sur la circonférence duquel trois points m, n, p forment un triangle équilatère : par ces points passent trois génératrices M, N, P de l'hyperboloïde à une nappe qui aurait le cercle C pour trace et c pour cercle de gorge;

L'axe de tout le système est le diamètre vertical de la sphère S.

Il s'agit de construire les courbes de pénétration de la sphère par trois cylindres de révolution de même rayon que le cercle de gorge de l'hyperbole, et ayant pour axe une des trois génératrices M, N, P.

Nota. Chaque cylindre sera limité, en bas par le plan horizontal de projection, en haut par un plan perpendiculaire à son axe et distant de 6 centimètres du centre (O.O′) de la sphère S. Le triangle *mnp* n'aura pas de côté parallèle ou perpendiculaire au plan vertical.

12. *Données.* Les mêmes que celles de la question précédente.

Il s'agit de percer dans la sphère S les trous résultants du passage de trois cylindres de révolution de même rayon que le cercle de gorge de l'hyperboloïde, et ayant pour axes les génératrices M, N, P.

Nota. Dans la mise à l'encre, on supposera que les cylindres ont été enlevés; seulement on en conservera le souvenir en figurant leurs traces et leurs contours en pointillé (traits longs, égaux et également espacés), sans distinction des parties vues et des parties cachées.

13. *Données.* Une droite (D.D′) dont les projections font chacune un angle de 45 degrés avec la ligne de terre;

Une ellipse E, située sur le plan horizontal, dont les axes de 10 centimètres et de 6 centimètres ne sont ni l'un ni l'autre parallèles à la ligne de terre;

Tracez les limites des projections d'un cylindre ayant pour base l'ellipse E, et pour génératrices des droites parallèles à (D.D′);

Considérez ensuite les deux plans tangents ayant pour traces les deux droites qui limitent la projection horizontale de ce cylindre, et imaginez un cylindre à base circulaire auquel ces deux plans soient aussi tangents et dont les génératrices ne soient pas parallèles à celles du cylindre elliptique.

Il s'agit de construire l'intersection des deux surfaces cylindriques.

14. *Données.* Un triangle équilatéral *abc* de 5 centimètres de côté, situé dans un plan horizontal élevé de 5 centimètres au-dessus de la ligne de terre;

Trois sphères ayant leurs centres aux points *a*, *b*, *c* et un rayon commun de 5 centimètres.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection des trois sphères; 2° de détacher par un mouvement de transport parallèle le solide commun à ces trois sphères, et d'en faire séparément les projections.

Plans tangents.

15. *Données.* Un hyperboloïde à une nappe dont l'axe est vertical; sa trace a 5 centimètres de rayon; le cercle de gorge, de 4 centimètres de rayon, est élevé de 5 centimètres au-dessus du plan horizontal; l'hyperboloïde est limité dans sa partie supérieure par un plan horizontal élevé de 9 centimètres au-dessus de la ligne de terre;

Une droite (D.D′) qui fait avec le plan horizontal un angle plus grand que celui de la génératrice rectiligne de l'hyperboloïde avec le même plan.

Il s'agit : 1° de construire le contour de la projection verticale de l'hyperboloïde; 2° de mener une suite de plans parallèles à la droite (D.D′) et tangents à la surface, et de tracer le lieu des points de contact de tous ces plans.

ENSEIGNEMENT GRAPHIQUE.

Note du Rédacteur. Nous croyons être utile à l'enseignement graphique en ramenant l'attention sur une collection dont nous avons déjà parlé (tome X, page 453), et qui depuis est entrée dans presque tous les grands établissements de Paris et dans plusieurs lycées de province, et qui devra trouver place dans toutes les grandes institutions. Le catalogue ci-joint peut servir de guide et fournir de nombreux sujets d'exercices; nous aurions désiré y rencontrer quelques exemples de cristaux hémitropes, géminés, etc., formes insolites, où les yeux sont d'utiles auxiliaires. On peut tout demander à l'habileté et tout attendre de la science et du zèle du chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique. Déjà M. Bardin s'est fait connaître avantageusement par la publication d'un atlas d'épures avec texte, sous le titre de *Notes et croquis de géométrie descriptive* (*); titre rare, car il tient plus qu'il ne promet.

COLLECTION DE CORPS SOLIDES

DESTINÉS A L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE;

PAR M. BARDIN.

Cette collection, qui doit servir à des élèves ayant étudié la géométrie élémentaire, commence par les intersections des surfaces pyramidales et des surfaces prismatiques.

Les pyramides et les prismes, les polyèdres irréguliers, les polyèdres réguliers et leurs dérivés à points (polyèdres étoilés); les polyèdres symétriques, etc., considérés isolément, appartiennent à une autre série qui constitue un premier enseignement dans lequel il n'est question que de la nomenclature des grandeurs figurées de la géométrie. La vue des objets suffit pour rendre facile et attrayante la première étude de ces grandeurs,

(*) A Paris, chez Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55.

surtout si l'on a soin de les proposer pour sujets dans les exercices élémentaires du dessin d'imitation.

INTERSECTIONS DE POLYÈDRES.

Prisme et Pyramide. *Pénétration* suivant des lignes d'entrée et de sortie distinctes : les deux *corps réunis;* — séparément, le *prisme pénétré* et la *pyramide pénétrante;* — le *solide commun* aux deux corps; — la *coupe verticale* du prisme pénétré.................................. 5 modèles.

— *Arrachement* suivant une ligne fermée : les deux *corps réunis;* — séparément, le *prisme arraché* et la *pyramide arrachante;* — le *solide commun*.................... 4 modèles.

— Cas où les deux solides ont un plan rasant (*) commun : *pénétration réciproque* suivant des lignes d'entrée et de sortie qui se croisent; — les deux *corps réunis* (toit d'arête prismo-pyramidal)........................... 1 modèle.

Prisme et Prisme. *Arrachement* suivant une ligne fermée.. 1 modèle.

— Cas où les deux corps ont deux plans rasants communs : *pénétration réciproque* suivant deux lignes qui se croisent en deux points; — les deux *corps réunis* (toit d'arête bi-prismatique)................................ 1 modèle.

Pyramide et Pyramide Cas où les deux corps ont deux plans rasants communs : *pénétration* suivant deux lignes qui se croisent en deux points; — les deux *corps réunis* (toit d'arête bi-pyramidal)........................... 1 modèle.

Prisme et Polyèdre quelconque. *Pénétration* du polyèdre par le prisme suivant deux lignes distinctes........ 1 modèle.

Il serait facile de multiplier ces combinaisons en établissant certaines conditions de parallélisme entre les arêtes et les faces des corps; mais comme ces résultats ont peu d'intérêt au point de vue géométrique, on a évité de

(*) Plan rasant, celui qui passe par une arête sans rencontrer le corps.

les reproduire en relief. Aidés par les modèles qui viennent d'être énumérés, et guidés par l'analogie qui existe entre les prismes et les cylindres, entre les pyramides et les cônes, les élèves pourront traiter graphiquement tous les cas qui ont été laissés de côté.

INTERSECTIONS DE SURFACES COURBES.

Ces intersections donnent dans l'espace des courbes des deuxième, troisième et quatrième degrés qu'il serait difficile de réaliser autrement.

Sections planes.

Sections planes du solide, compris entre un hyperboloïde de révolution à une nappe et son cône asymptote. 12 modèles.

Toutes les sections coniques, — cercle, ellipse, parabole, hyperbole, droites, — et leurs semblables sur l'hyperboloïde, se trouvent réunies dans ces douze modèles. Il est d'ailleurs facile de les varier à volonté, en plongeant plus ou moins le solide conico-hyperboloïdal dans un liquide légèrement coloré, afin de mieux faire ressortir les courbes de niveau qui sont des coniques.

Cônes et cylindres du second degré.

Cône et Cône. *Pénétration* suivant des courbes d'entrée et de sortie distinctes : les deux *corps réunis;* — séparément, le *cône pénétré* et le *cône pénétrant;* — le *solide commun* aux deux corps; — la *coupe verticale* du cône pénétré. 5 modèles.

— Cas où les deux corps ont deux plans tangents communs : *pénétration réciproque* suivant deux courbes planes qui se croisent en deux points; — les deux *corps réunis* (voûte d'arête bi-conique); *coupe* suivant une des ellipses d'intersection . . . . 2 modèles.

— Cas où les surfaces ont des génératrices parallèles : *arrachement indéfini* suivant une courbe hyperbolique. 1 modèle.

— Cas où les surfaces se rencontrent suivant une génératrice et une courbe du troisième degré.............. 1 modèle.

Cylindre et Cylindre. *Pénétration* suivant deux courbes distinctes................................ 1 modèle.

— *Arrachement réciproque* d'un cylindre elliptique et d'un cylindre de révolution suivant une courbe fermée : les deux *corps réunis ;* — séparément : 1° le *cylindre elliptique arraché* et le *cylindre de révolution arrachant;* 2° le *cylindre de révolution arraché* et le *cylindre elliptique arrachant;* — le *solide commun*............................... 5 modèles.

— Cas où les deux corps ont deux plans tangents communs : *pénétration réciproque* suivant deux courbes planes qui se croisent en deux points; — les deux *corps réunis* (voûte d'arête bi-cylindrique); fragment en coin de l'un des cylindres. .... 2 modèles.

Cône et Cylindre. Cas où les deux corps ont un plan tangent commun : les deux *corps réunis* (voûte d'arête cylindro-conique)................................ 1 modèle.

— *Arrachement* suivant une courbe fermée..... 1 modèle.

— Cas où les surfaces ont des génératrices parallèles : *arrachement indéfini* suivant une courbe parabolique.. 1 modèle.

— Cas d'un cône à deux nappes ayant son sommet dans l'intérieur du cylindre : *pénétration* suivant deux courbes distinctes; — les deux *corps réunis;* — séparément, le *cylindre pénétré* et les deux *solides communs*, le *cône pénétrant*...... .... 4 modèles.

— Cas d'un *cône creux à parois épaisses*, traversé par un *cylindre de révolution*........................ 1 modèle.

Cette série, sans renfermer toutes les combinaisons qu'on peut se proposer sur les surfaces coniques et les surfaces cylindriques, présente les plus importantes et les plus usuelles, qui suffisent en même temps pour donner une idée complète de la question générale.

CORPS DE RÉVOLUTION.

SPHÈRE ET CYLINDRE. *Pénétration* suivant deux courbes distinctes ; — *pénétration* ou *arrachement* suivant une courbe à nœud ;—*arrachement* suivant une courbe fermée. 3 modèles.

SPHÈRE ET CÔNE. Les mêmes cas que les précédents. 3 modèles.

ELLIPSOÏDE ALLONGÉ ET ELLIPSOÏDE APLATI. Les mêmes cas que les précédents........................... 3 modèles.

Total des modèles............... 60 (*).

Cette collection a un complément nécessaire, dont l'énumération détaillée ne saurait trouver place ici. En voici un simple aperçu :

Polyèdres symétriques ; polyèdres réguliers, simples et étoilés ; intersection de deux polyèdres quelconques ; prismes ou pyramides de même base et de même hauteur ; etc. ; — voûtes d'arêtes diverses ; — maison avec lucarnes et cheminées (sujet de lever, d'ombre et de perspective) ; — corps de révolution : cônes, cylindres, sphères, ellipsoïdes, paraboloïdes, hyperboloïdes ; puits, bornes, niches (cylindrique, conique, cylindro-sphérique), consoles (cylindrique, conique), balustres, tores (à jour, à un ou à deux ombilics), toupie, poulie, etc.

Surfaces générales du second degré : ellipsoïde avec ses sections principales, ses sections circulaires, un système de sections elliptiques quelconques, mais équidistantes, ses lignes de courbure ; — Hyperboloïdes et paraboloïde avec leurs sections principales et leurs sections circulaires, et l'hyperboloïde à une nappe avec ses génératrices rectilignes de l'une et l'autre génération ; — Paraboloïde hyperbolique (Plan gauche), avec ses sections principa-

(*) Le prix de cette collection est de cent francs. S'adresser franco à M. Bardin, 23, rue du Cherche-Midi, à Paris.

les, un système de sections équidistantes et perpendiculaires à l'axe, un système de sections équidistantes et parallèles à l'une des sections principales, ses génératrices rectilignes de l'une et l'autre génération; — Cônes et cylindres.

Formes héliçoïdales : héliçoïde gauche (plusieurs combinaisons); roues à palettes héliçoïdales; vis à filet triangulaire, à filet carré, à filet trapézoïdal, et leurs écrous; limons d'escalier; variétés de serpentins; colonnes torses, etc. — Anneaux tors, simplement ou doublement tors (profil carré, profil composé); — Divers cas d'intersections de deux surfaces; — Intersections de trois surfaces (trois cônes, trois cylindres); cas de trois sphères égales, ayant leurs centres aux sommets d'un triangle équilatéral (leur solide commun), etc.

Exercices de stéréotomie : arche biaise ou pont biais, représenté dans son ensemble à l'échelle du centième, et dans ses détails à l'échelle du vingtième; escaliers; etc.

Surfaces représentant des lois physiques et des lois mathématiques à trois variables; — Construction en relief de l'équation des cordes vibrantes par Monge, de la surface de l'onde lumineuse de Fresnel, de la formule représentant la surface dans laquelle se transforme par la torsion la section droite d'un prisme élastique (à base carrée, rectangulaire, elliptique), par M. de Saint-Venant, etc.

Collection très-variée de *Reliefs topographiques;* études de rochers à grande échelle, etc.

Note du Rédacteur. Les coquilles héliçoïdales de plusieurs mollusques gastéropodes sont susceptibles d'une certaine construction dont nous parlerons prochainement. Les données géométriques fournissent même de nouveaux caractères génériques qu'on doit à mon neveu Terquem, conchyliologiste, qui habite Metz.