

SOUFFLET

**Note sur les dérivées de $\log x$ et $\arctan x$
et sur leurs développements en série**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 12
(1853), p. 438-441

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__438_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LES DÉRIVÉES DE LOG x ET ARC TANG x ET SUR
LEURS DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE;**

PAR M. L'ABBÉ SOUFFLET,

Professeur, docteur ès sciences mathématiques.

1°. Rappelons d'abord que

$$\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = x_1^{m-1} + x x_1^{m-2} + \dots + x^{m-1},$$

m étant entier et positif. Si l'on fait $x_1 = x$, ou aura, limite de $\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$, ou dérivée de $x^m = mx^{m-1}$. Ainsi la dérivée de x sera x^0 ou 1, celle de x^2 sera $2x$, et en général celle de ax^m sera limite de $a \times \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$, ou max^{m-1} . Réciproquement, x_0, x, x^2, x^3 , etc., *dérivront* respectivement de $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}$.

2°. La dérivée de $\log x$ est, par définition, la limite de $\frac{\log(x+h) - \log x}{h}$, ou de $\frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$, ou de $\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x}$, si l'on fait $h = \alpha x$, α et h étant infiniment petits en même temps.

Or les progressions logarithmiques

$$\begin{array}{l} 1 : (1 + \alpha) : (1 + \alpha)^2 \dots, \\ 0 \quad h\alpha \quad 2h\alpha \dots, \end{array}$$

donnent, par *définition*,

$$h\alpha = \log(1 + \alpha),$$

quel que soit α ; donc la dérivée de

$$\log x = \frac{k\alpha}{\alpha x} = \frac{k}{x} ;$$

puisque nous avons

$$\bullet \quad k = \frac{\log(1 + \alpha)}{\alpha} = \log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

il s'ensuit que $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est la base du système logarithmique dont le module $k = 1$, et en la désignant par e , nous aurons

$$k = \log e.$$

3°. Il est évident que la dérivée de $\log(1 + x)$ est $\frac{k}{1 + x}$, puisque, en remplaçant $1 + x$ par y , on serait ramené au cas précédent. Or, une simple division de 1 par $1 + x$ donne

$$\frac{k}{1 + x} = k(1 - x + x^2 - x^3 + \dots)$$

pour dérivée de $\log(1 + x)$; donc, réciproquement,

$$\log(1 + x) = k \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right).$$

Du reste, on sait transformer cette série en une autre très-convergente pour une valeur quelconque de la variable plus grande que l'unité. En supposant $k = 1$, on calculera donc l_2 , et, par suite, l_4 , l_5 ; d'où l'on déduira l_{10} et $\frac{1}{l_{10}}$ pour valeur numérique du module k dans le système dont la base est 101. Le module une fois connu, la même série donnera les logarithmes vulgaires.

Remarque. Il semble peu naturel de définir le nombre e par le binôme $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ considéré seul en dehors des

progressions logarithmiques et de le calculer d'avance. Nous préférons la marche précédente, puisque l'on évite ainsi d'employer les séries avant les dérivées. (Voir *les Dérivées et les séries simplifiées*; chez Mallet-Bachelier.)

4°. On a

$$\operatorname{tang} x_1 - \operatorname{tang} x = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(x_1 - x)}{\cos x_1 \cos x};$$

donc la dérivée de l'arc x par rapport à $\operatorname{tang} x$ ou la limite de $\frac{x_1 - x}{\operatorname{tang} x_1 - \operatorname{tang} x}$ égale la limite de

$$\frac{x_1 - x}{\sin(x_1 - x)} \times \cos x_1 \cos x = \cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + u^2},$$

$\operatorname{tang} x$ étant remplacée par u .

5°. En divisant 1 par $1 + u^2$, cette dérivée devient

$$1 - u^2 + u^4 - u^6 + \dots$$

Donc réciproquement l'arc $\operatorname{tang} u$ ou x égale

$$u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} \dots$$

Si l'on fait $u = \frac{1}{5}$, cette série donnera la valeur d'un arc α correspondant; mais

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tang} 4\alpha = \frac{120}{119},$$

et

$$\operatorname{tang} \left(4\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{239},$$

et si l'on pose

$$u = \frac{1}{239},$$

la série précédente donnera la valeur de

$$4\alpha - \frac{\pi}{4};$$

(441)

donc

$$4 \operatorname{arc tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc tang} \frac{1}{139},$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = & 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} - \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) \\ & - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \dots \right). \end{aligned}$$
