NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. HAILLECOURT

Théorèmes sur les surfaces courbes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 398-406

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__398_0>

THÉORÈMES SUR LES SURFACES COURBES (*);

PAR M. A. HAILLECOURT,
Professeur au lycée de Nîmes.

M. J. Binet, cité par M. Leroy (*Analyse appliquée*, 2e édit., n° 231), emploie, pour la démonstration de deux propriétés des diamètres conjugués de l'ellipsoïde, une méthode qui paraît n'avoir pas été assez remarquée. Je vais l'appliquer à plusieurs théorèmes, et, en particulier, à celui de M. Steiner (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 407).

J'invoquerai constamment deux principes évidents pour quiconque aura suivi attentivement l'article de M. Leroy indiqué plus haut, et la démonstration ordinaire des formules d'Euler pour la transformation des coordonnées.

Premier principe.

Si un théorème vrai pour trois axes rectangulaires OA, OB, OC coupant une surface subsiste encore quand on y remplace deux axes OA, OB par d'autres axes aussi rectangulaires compris dans le même plan perpendiculaire sur OC; alors ce théorème est vrai pour trois axes rectangulaires quelconques.

Deuxième principe.

Si un théorème vrai pour trois diamètres conjugués d'une surface du second ordre subsiste quand on y remplace deux axes OA, OB par deux autres axes OA_1, OB_1 aussi conjugués et situés dans le même plan conjugué au troisième OC; alors ce théorème est vrai pour trois diamètres conjugués quelconques.

CONSÉQUENCES DU PREMIER PRINCIPE.

1. THÉORÈME DE M. STEINER. *Trois cordes rectangulaires d'une surface du second ordre tournant autour*

(*) Voir *Nouvelles Annales*, tome I, page 497.

d'un point O *et la coupant en six points* A, A', B, B', C, C', *on a*

$$\left(\frac{AA'}{OA\,.\,OA'}\right)^2+\left(\frac{BB'}{OB\,.\,OB'}\right)^2+\left(\frac{CC'}{OC\,.\,OC'}\right)^2=\text{const.}$$

Démonstration. Le plan AOB pris pour plan des X, Y, tandis qu'on prend OC pour axe des Z, coupe la surface suivant une conique E.

Dans ce plan, menons deux nouveaux axes orthogonaux OX_1, OY_1; nous aurons (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 408)

$$\left(\frac{A_1A'_1}{OA_1\times OA'_1}\right)^2+\left(\frac{B_1B'_1}{OB_1\times OB'_1}\right)^2=\left(\frac{AA'}{OA\,.\,OA'}\right)^2+\left(\frac{BB'}{OB\,.\,OB'}\right)^2.$$

Ajoutant aux deux membres $\left(\frac{CC'}{OC\,.\,OC'}\right)^2$, il vient

$$\left(\frac{A_1A'_1}{OA_1\,.\,OA'_1}\right)^2+\left(\frac{B_1B'_1}{OB_1\,.\,OB'_1}\right)^2+\left(\frac{CC'}{OC\,.\,OC'}\right)^2$$
$$=\left(\frac{AA'}{OA\,.\,OA'}\right)^2+\left(\frac{BB'}{OB\,.\,OB'}\right)^2+\left(\frac{CC'}{OC\,.\,OC'}\right)^2.$$

Comme on peut de nouveau faire tourner la corde CC' et une des deux nouvelles cordes $A_1A'_1$, par exemple, autour de $B_1B'_1$, sans altérer la valeur de la fonction, on voit qu'elle est constante. C. Q. F. D.

Scolie. La méthode étant maintenant expliquée, nous pourrons dorénavant être plus concis. Remarquons avec soin que *les questions de géométrie à trois dimensions se ramènent à des questions de géométrie plane*.

2. *Lemme*. Soit

$$0=1+(Ax+By)+(Cx^2+Dxy+Fy)\ldots$$

l'équation d'une courbe d'ordre m rapportée à des axes rectangulaires. Passant aux coordonnées polaires

$$0=1+(A\cos\varphi+B\sin\varphi)\rho$$
$$+(C\cos^2\varphi+D\sin\varphi\cos\varphi+E\sin^2\varphi)\rho^2\ldots;$$

si, pour avoir deux sécantes orthogonales OV, OV_1, nous donnons à φ deux valeurs différant de $\frac{\pi}{2}$, et que nous désignions par ρ et ρ_1 une quelconque des racines de l'équation dans le premier et dans le second cas, nous aurons, d'après des principes connus,

$$-\sum \frac{1}{\rho} = A\cos\varphi + B\sin\varphi, \quad -\sum \frac{1}{\rho_1} = -A\sin\varphi + B\cos\varphi;$$

d'où

$$(1) \qquad \left(\sum \frac{1}{\rho}\right)^2 + \left(\sum \frac{1}{\rho_1}\right)^2 = A^2 + B^2 = \text{const.};$$

de même, comme

$$\sum \frac{1}{\rho'\rho''} = C\cos^2\varphi + D\sin\varphi\cos\varphi + E\sin^2\varphi,$$

$$(2) \qquad \sum \frac{1}{\rho'\rho''} + \sum \frac{1}{\rho'_1\rho''_1} = C + E = \text{const.},$$

en combinant (1) et (2),

$$(3) \qquad \sum \frac{1}{\rho^2} + \sum \frac{1}{\rho_1^2} = A^2 + B^2 - 2(C + E) = \text{const.}$$

Notre principe nous permet de conclure des courbes aux surfaces; mais auparavant remarquons que ρ_0 étant la distance au point O du centre des moyennes harmoniques des m points où OV perce la surface, nous avons

$$\frac{m}{\rho_0} = \sum \frac{1}{\rho}.$$

Cela étant :

Trois axes rectangulaires tournant autour d'un point fixe O *et coupant une surface d'ordre m chacun en m points,*

1er THÉORÈME. *La somme des carrés inverses des* $3m$ *segments comptés à partir de* O *est constante.*

2^e THÉORÈME. *La somme des* $\frac{3m(m-1)}{1.2}$ *produits deux à deux des segments compris sur les mêmes axes, est constante.*

3^e THÉORÈME. *Si, sur chacun des axes, on prend par rapport à O le centre des moyennes harmoniques des points où cet axe perce la surface, la somme des carrés des inverses des rayons vecteurs de ces trois centres est constante.*

Corollaire. Le plan qui passe par ces trois centres roule sur une sphère décrite de O comme centre (*voir* 4).

3. *Lemme.* La somme des carrés inverses de deux diamètres rectangulaires d'une ellipse est constante; donc :

THÉORÈME. *La somme des carrés inverses de trois diamètres rectangulaires d'un ellipsoïde est constante.*

(Pour les hyperboloïdes, on prend négativement les carrés des diamètres imaginaires.)

4. *Lemme.* L'enveloppe d'une corde AB vue sous un angle droit, du centre d'une ellipse, est une circonférence concentrique.

Soient trois diamètres rectangulaires OC, OB, OA d'un ellipsoïde; prenons la projection commune H de C et O sur AB. H est à une distance constante de O. La projection de O sur le plan CAB est la hauteur du triangle COH. Comme ce triangle est constant, la perpendiculaire OP abaissée sur CH est aussi constante; donc :

THÉORÈME. *Le plan qui passe par les extrémités de trois diamètres rectangulaires d'un ellipsoïde roule sur une sphère.* (CHASLES, *Correspondance polytechnique*, tome III, pages 302 et suivantes.)

Remarque I. Le troisième théorème (II) prouve que les trois centres des moyennes harmoniques situés sur les trois axes sont sur un ellipsoïde. C'est ainsi que se démontre le principe, objet du corollaire.

Remarque III. Notre lemme pour l'hyperbole suppose les deux diamètres OA ; OB réels. Par suite, pour les hyperboloïdes, le dernier théorème n'est pas vrai sans restriction.

5. *Lemme.* OA, OB étant à angle droit (mêmes données), menons les tangentes AT, BT. Dans la section AOB, le point T décrit une ellipse E concentrique.

Par AT et BT menons deux plans parallèles à OD (diamètre conjugué à la section AOB) (*) et prenons le pied S de leur intersection TS sur le plan P tangent en C. S décrit évidemment une ellipse E′ ayant son centre sur OD et qui appartient au lieu du point de concours de trois plans tangents menés par les extrémités de trois diamètres rectangulaires.

Ce lieu est donc composé d'une infinité de sections elliptiques.

THÉORÈME. *Le lieu du sommet d'un angle trièdre dont les faces sont tangentes à un ellipsoïde aux extrémités de trois diamètres rectangulaires est un ellipsoïde concentrique.* (CHASLES, *Correspondance polytechnique.*)

6. Le théorème de Monge démontré par Poisson (*Correspondance polytechnique*, tome I, pages 30, 240), sur le lieu du sommet d'un angle trièdre trirectangle circonscrit à l'ellipsoïde, paraît échapper à cette méthode. On y arrive pourtant de la manière la plus heureuse ainsi qu'il suit :

Rappelons que : 1° le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une conique à centre est un cercle concentrique ; 2° un plan tangent à une surface du second ordre, mobile parallèlement à une droite, enveloppe un cylin-

---

(*) On sait que le plan tangent en un point K est parallèle à tout diamètre conjugué du diamètre OK.

dre du second ordre qu'on peut par conséquent prendre pour surface directrice, et dont l'axe passe par le centre de la surface donnée.

Cela posé, soient T un point du lieu; a, b, c les points de contact des trois faces de l'angle trièdre; α, β, ω les projections sur le plan BTA de a, b et de O, centre commun de la surface et de la courbe de contact du cylindre circonscrit perpendiculaire au plan BTA.

La base de ce cylindre est une conique ayant ω pour centre, et tangente aux droites TA, TB en α, β.

Faisons mouvoir l'angle trièdre de sorte que la face AB glisse dans son propre plan. Le point T décrit une circonférence de centre ω, et qui appartient au lieu demandé. Ce lieu a donc une infinité de sections circulaires. O se projette sur leurs centres. Donc :

Théorème. *Le lieu du sommet d'un angle trirectangle circonscrit à une surface courbe à centre du second ordre est une sphère concentrique.* C. Q. F. D.

Conséquences du deuxième principe.

7. *Lemme.* Dans l'ellipse, la somme des carrés des projections sur une droite quelconque de deux diamètres conjugués est constante.

Soit OAB une section d'ellipsoïde faite par un plan passant par le centre; A, B étant deux points conjugués, projetons-les en α, β sur un diamètre fixe KK′, et en a, b sur la droite H′H, projection de K′K sur le plan OAB.

Nous avons

$$\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 = \text{const.},$$
$$\alpha a^2 + \beta b^2 = \text{const.};$$

car

$$\alpha a^2 + \beta b^2 = \tang^2\omega\,(\mathrm{O}a^2 + \mathrm{O}b^2),$$

et on sait que ω est l'angle que forment les diamètres KK′, HH′,

$$Oa^2 + Ob^2 = \text{const.},$$

et aussi

$$A\alpha^2 = Aa^2 + \alpha a^2,$$
$$B\beta^2 = Bb^2 + \beta b^2;$$

donc

$$A\alpha^2 + B\beta^2 = \text{const.},$$

d'où :

Théorème. *Dans l'ellipsoïde, la somme des carrés des distances de trois points conjugués à un diamètre fixe est constante.*

Nous avons aussi

$$O\alpha^2 + O\beta^2 = \text{const.}$$

Théorème. *La somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur un diamètre fixe est constante.* (Chasles, *loc. cit.*)

On démontrerait les mêmes choses en prenant un plan diamétral au lieu d'un diamètre.

8. Soit OC le diamètre conjugué au plan OAB.

Nous venons de voir que

$$A\alpha^2 + B\beta^2 = \text{const.},$$

d'où, multipliant par OC^2, désignant par surf (OC, OB) la surface du parallélogramme construit sur OC et OB, il vient, puisque surf (OB, OA) est constante,

$$\text{surf}^2(OA, OB) + \text{surf}^2(OA, OC) + \text{surf}^2(OB, OC) = \text{const.}$$

Mais si l'on construit le parallélipipède circonscrit sur OA, OB, OC, les faces sont respectivement quadruples des parallélogrammes que nous considérons. Donc :

Théorème. *La somme des carrés des faces du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constante.* (Chasles.)

9. *Lemme.* A et B sont deux points conjugués, AT,

BT leurs tangentes. Sur un diamètre fixe mené dans le plan du parallélogramme AOBT, on a

$$\frac{1}{\overline{OE}^2} + \frac{1}{\overline{OD}^2} = \text{const.};$$

D et E sont les intersections du diamètre et des côtés BT, AT du parallélogramme; par AT, BT, menons les plans parallèles au diamètre conjugué OC et, par suite, tangents à l'ellipsoïde. Si une droite de l'espace projetée en OD est coupée en L_1, D_1 (on projette parallèlement à OC), il est clair que

$$\frac{1}{\overline{OE}_1^2} + \frac{1}{\overline{OD}_1^2} = \text{const}.$$

Théorème. *La somme des carrés des inverses des segments interceptés sur un diamètre fixe par trois plans tangents conjugués est constante.*

10. *Lemme.* Coupons deux diamètres fixes d'un cercle par deux tangentes rectangulaires quelconques. Il est aisé de voir que

$$\frac{1}{\text{OD}.\text{OD}'} + \frac{1}{\text{OE}.\text{OE}'} = \text{const.},$$

D et D′ étant les intersections des deux diamètres OD, OD′ par l'une des tangentes, E et E′ les intersections des mêmes diamètres par la seconde tangente; ou

$$\frac{1}{\text{surf DOD}'} + \frac{1}{\text{surf EOE}'} = \text{const}.$$

La propriété étant projective est vraie pour l'ellipse.

Imaginons dans l'espace deux diamètres au lieu d'un (§ 9); nous aurons:

Théorème. *La somme des inverses des surfaces de trois triangles compris entre deux diamètres fixes de l'ellipsoïde et les traces sur leur plan de trois plans tangents conjugués est constante.* (Chasles, *loc. cit.*)

Remarque générale. Nous ramenons tout à la géométrie plane, parce que de trois diamètres conjugués a, b, c nous n'en considérons que deux, a et b. Si donc dans un théorème, c entre d'une manière implicite, lors même qu'on ne fait varier que a et b, le théorème échappe à la méthode. C'est ce qui aura lieu, par exemple, quand il s'agira des courbures en trois points conjugués ou même simplement des normales.

Ainsi on ne pourra pas démontrer par cette voie ce théorème :

La somme des carrés des normales en trois points conjugués, prolongées jusqu'à un plan diamétral principal, est constante.