NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANGELO GENOCCHI

Théorèmes sur les fonctions homogènes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 393-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__393_1>

THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES;

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

1er THÉORÈME. *Toute fonction homogène à deux indéterminées x, y, et d'un degré impair $m = 2n + 1$,*

$$a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + m a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m,$$

peut être réduite à la forme canonique

$$p_0(x+a_0y)^m + p_1(x+\alpha_1 y)^m + \ldots + p_n(x+\alpha_n y)^m,$$

par la solution d'une équation du degré $n+1$.

(Sylvester.)

Démonstration. Ce théorème, que son illustre auteur a tiré de la théorie des *adjoints* et des *hyperdéterminants*, et que M. Faà de Bruno n'a démontré récemment dans le Journal de M. Liouville qu'au moyen d'une analyse assez longue et compliquée, peut être établi très-simplement, ainsi qu'il suit.

En identifiant les deux expressions précédentes, on trouve

$$(1)\quad \begin{cases} p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n = a_0, \\ p_0\alpha_0 + p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_{n-1}\alpha_{n-1} + p_n\alpha_n = a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_0\alpha_0^{2n} + p_1\alpha_1^{2n} + p_2\alpha_2^{2n} + \ldots + p_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n} + p_n\alpha_n^{2n} = a_{2n}, \\ p_0\alpha_0^{2n+1} + p_1\alpha_1^{2n+1} + p_2\alpha_2^{2n+1} + \ldots + p_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n+1} + p_n\alpha_n^{2n+1} = a_{2n+1}, \end{cases}$$

$2n+2$ équations pour autant d'inconnues p_i et α_i. Éliminons d'abord p_0 : faisant, en général,

$$q_i = p_i(\alpha_0 - \alpha_i),$$

on obtient ces $2n+1$ équations

$$(2)\quad \begin{cases} q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1} + q_n = a_0\alpha_0 - a_1, \\ q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots + q_{n-1}\alpha_{n-1} + q_n\alpha_n = a_1\alpha_0 - a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1\alpha_1^{2n-1} + q_2\alpha_2^{2n-1} + \ldots + q_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n-1} + q_n\alpha_n^{2n-1} = a_{2n-1}\alpha_0 - a_{2n}, \\ q_1\alpha_1^{2n} + q_2\alpha_2^{2n} + \ldots + q_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n} + q_n\alpha_n^{2n} = a_{2n}\alpha_0 - a_{2n+1}. \end{cases}$$

Prenons maintenant $n+1$ facteurs $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$; on pourra supposer qu'ils vérifient les n équations suivantes, qui déterminent les rapports de l'un d'eux à tous les autres :

$$(3)\quad \begin{cases} A_0 + A_1\alpha_1 + A_2\alpha_1^2 + \ldots + A_n\alpha_1^n = 0, \\ A_0 + A_1\alpha_2 + A_2\alpha_2^2 + \ldots + A_n\alpha_2^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0 + A_1\alpha_n + A_2\alpha_n^2 + \ldots + A_n\alpha_n^n = 0. \end{cases}$$

Multiplions par ces facteurs respectivement : 1° les premières $n+1$ équations du système (2); 2° les $n+1$ équations du même système qui suivent la première; 3° les $n+1$ équations qui suivent la deuxième, etc., et enfin les dernières $n+1$ équations : ajoutant les produits fournis par chaque groupe de $n+1$ équations, et ayant égard aux relations (3), nous trouverons

$$(4)\quad \begin{cases} A_0(a_0\alpha_0 - a_1) + A_1(a_1\alpha_0 - a_2) + \ldots + A_n(a_n\alpha_0 - a_{n+1}) = 0, \\ A_0(a_1\alpha_0 - a_2) + A_1(a_2\alpha_0 - a_3) + \ldots + A_n(a_{n+1}\alpha_0 - a_{n+2}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0(a_n\alpha_0 - a_{n+1}) + A_1(a_{n+1}\alpha_0 - a_{n+2}) + \ldots + A_n(a_{2n}\alpha_0 - a_{2n+1}) = 0, \end{cases}$$

autres $n+1$ équations entre lesquelles on déterminera les rapports des quantités $A_0, A_1, \ldots, A_n$, et il restera une équation en α_0 exprimant que le déterminant des équations (4) est nul. Ainsi α_0 sera une racine de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le déterminant des quantités

$$\begin{vmatrix} a_0x - a_1, & a_1x - a_2, \ldots, & a_{n+1}x - a_{n+2}, \\ a_1x - a_2, & a_2x - a_3, \ldots, & a_nx - a_{n+1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_nx - a_{n+1}, & a_{n+1}x - a_{n+2}, \ldots, & a_{2n}x - a_{2n+1} \end{vmatrix}$$

et qui sera évidemment du degré $n+1$. On dira la même chose de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, de manière que cette équation aura pour racines les $n+1$ inconnues α_i, et, après l'avoir résolue, on déterminera les $n+1$ inconnues p_i au moyen de $n+1$ équations linéaires prises dans le système (1).

2^e THÉORÈME. *Soit*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_n = 0,$$

un système de n équations homogènes littérales entre les n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$; F_1 *est du degré* p_1, F_2 *du degré* $p_2, \ldots$, F_n *du degré* p_n. *Soit* $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n = P$. *En éliminant les inconnues, on parvient à une équation homogène entre les coefficients. Les coefficients de* F_1 *montent dans chaque terme au degré* $\frac{P}{p_1}$, *les coefficients de* F_2 *au degré* $\frac{P}{p^2}$, *etc.; conséquemment, le degré de l'équation est*

$$P\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\right).$$

(CAYLEY.)

Je prends cet énoncé dans les *Nouvelles Annales*, tome VIII, page 115 : la démonstration qu'on a donnée au même endroit n'est pas exacte, car on y suppose qu'une fonction entière homogène entre n indéterminées x_1, $x_2, \ldots, x_n$ peut toujours être décomposée en facteurs de la forme $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$, ce qui n'est pas vrai lorsque $n > 2$. Je crois que la suivante est complétement rigoureuse et assez simple (*).

Soit posé

$$\frac{x_1}{x_n} = y_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = y_2, \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = y_{n-1}.$$

Si l'on substitue dans les fonctions F_1, $F_2, \ldots$, F_n les va-

(*) Il y a dans le même article des *Nouvelles Annales*, que nous avons rappelé, quelques autres inexactitudes. Il est facile de les rectifier leurs de x_1, $x_2,\ldots,$ x_{n-1}, et qu'on fasse disparaître les dénominateurs, on trouvera n autres fonctions entières φ_1, $\varphi_2,\ldots,$ φ_n respectivement des mêmes degrés entre les inconnues y_1, $y_2,\ldots,$ y_{n-1}. On aura donc, entre ces inconnues, les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_{n-1} = 0, \quad \varphi_n = 0,$$

et les $n-1$ premières équations étant résolues, fourniront $p_1, p_2,\ldots, p_{n-1}$ systèmes de valeurs des inconnues y_1, $y_2,\ldots,$ y_{n-1}. Substituant successivement ces systèmes de valeurs dans la dernière fonction φ_n, et multipliant tous les résultats entre eux, on formera un produit que nous désignerons par $\Pi\varphi_n$, et l'équation $\Pi\varphi_n = 0$ sera celle qu'on doit obtenir par l'élimination des inconnues x_1, $x_2,\ldots,$ x_n. Or ce produit $\Pi\varphi_n$ sera une fonction entière et symétrique des systèmes des racines $y_1, y_2,\ldots, y_{n-1}$, et, par suite, il pourra s'exprimer rationnellement au moyen des coefficients des équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_{n-1} = 0$$

(*voyez* Serret, *Algèbre supérieure,* 8e leçon, pages 86 à 96), c'est-à-dire des coefficients des fonctions F_1, $F_2,\ldots,$ F_{n-1}; d'un autre côté, $\Pi\varphi_n$ est un produit de $p_1, p_2,\ldots, p_{n-1}$, ou $\frac{P}{p_n}$ facteurs, et, dans chacun de ces facteurs, les coefficients de la fonction φ_n ou F_n entrent au premier degré; d'où il suit que les coefficients de F_n monteront au degré $\frac{P}{p_n}$ dans le même produit. On peut donc conclure que, dans l'équation *résultante,* les coefficients de F_n montent au degré $\frac{P}{p_n}$. Par un raisonnement semblable, on prouvera que les coefficients de F_{n-1} y montent au degré $\frac{P}{p_{n-1}}$, et ainsi des autres.