Théorèmes segmentaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 358-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__358_1>

THÉORÈMES SEGMENTAIRES

(voir t. XII, p. 272)

Faisceaux de lignes à paramètre linéaire variable.

8. Si une courbe plane est donnée par une équation en x, y de degré m, courbe désignée, selon la notation de M. Steiner, par C^m, et si les coefficients de l'équation sont des fonctions linéaires d'un paramètre variable z, cette équation peut être mise sous la forme $Pz + Q = o$, où P et Q sont des fonctions entières de x, y de degré m; en donnant à t toutes les valeurs comprises entre $+\infty$ et $-\infty$, on obtient un faisceau de courbes que nous désignons, avec M. Steiner, par F^m; il est évident que toutes ces courbes passent par les mêmes m^2 points, donnés par les équations

$$P = o, \quad Q = o;$$

ces points sont les enveloppes du faisceau. Soit maintenant un second faisceau de degré n ou F^n, donné par une équation analogue $pz + q = o$; p et q sont des fonctions entières de x, y de degré n; les courbes de ce faisceau passent par les mêmes n^2 points. On nomme *courbes correspondantes* dans les deux faisceaux, les courbes qui correspondent à la même valeur de z; nous nommons deux faisceaux ainsi construits *faisceaux homographiques :* cette épithète, introduite par M. Chasles, est alors prise dans un sens général.

9. Théoreme. *Étant donnés deux faisceaux homographiques* F^m, F^n, *les intersections des courbes correspondantes sont sur une courbe de degré* $m+n$ *et cette courbe passe par* $(m+n)^2$ *points déterminés.*

Démonstration. Soient

$$Pz + Q = 0, \quad pz + q = 0$$

les équations respectives des faisceaux F^m, F^n; la valeur de z étant la même pour deux courbes correspondantes, les points d'intersection de ces deux courbes sont une ligne donnée par l'équation

$$Pq - Qp = 0,$$

qui est de degré $m+n$: on satisfait à cette équation par les quatre systèmes

$$P=0, \quad Q=0; \quad P=0, \quad p=0;$$
$$Q=0, \quad q=0; \quad p=0, \quad q=0;$$

systèmes qui déterminent $(m+n)^2$ points parmi lesquels se trouvent les m^2 points fixes du faisceau F^m et les n^2 points fixes de F^n.

10. Théorème. *Toute courbe plane de degré* $m+n$ *peut être engendrée par l'intersection de deux faisceaux homographiques* F^m, F^n.

Démonstration. Soit $M=0$ l'équation donnée d'une courbe plane de degré $m+n$; cette équation renferme $\frac{(m+n)(m+n+3)}{2} = r$ coefficients (le coefficient du premier terme étant l'unité). Prenons deux fonctions complètes P, Q de degré m, ces fonctions renferment ensemble $(m+1)(m+2)$ indéterminées; prenons aussi deux fonctions complètes p, q de degré n; ensemble, elles contiennent $(n+1)(n+2)$ indéterminées. L'équation

$$Pq - Qp = 0$$

contient donc $m^2 + n^2 + 3m + 3n + 3 = s$ indéterminées; en identifiant cette dernière équation avec l'équation $M = 0$, on obtient r équations entre s indéterminées; or

$$s - r = \frac{(m - n)^2 + 3(m + n + 2)}{2} = t;$$

ainsi, parmi les s indéterminées on peut en prendre t arbitrairement.

11. Faisons

$$m = n = 1;$$

ainsi on peut construire une conique par les intersections de deux faisceaux linéaires homographiques; c'est ce qu'on connaît depuis longtemps par les travaux de MM. Chasles et Steiner (*).

$m = 1$, $n = 2$; une ligne du troisième degré est donc le résultat de l'intersection de deux faisceaux F^1, F^2. (Chasles, *Comptes rendus*, 1853; 30 mai, page 949.)

$m = 1$, $n = 3$ ou bien $m = 2$, $n = 2$; on peut donc construire une courbe du quatrième degré par les intersections de F^1, F^3 ou bien par les intersections de F^2, F^2, et ainsi de suite.

12. *Définition.* Si d'un point A pris dans le plan d'une courbe C^m on mène les $m(m-1)$ tangentes, les points de contact sont sur une ligne C^{m-1}, qu'on nomme *première polaire* du point A relativement à la ligne C^m; si l'on prend la première polaire du même point A relativement à C^{m-1}, on a une courbe C^{m-2} qu'on nomme la *seconde polaire* du point A par rapport à la courbe première C^m, et ainsi de suite; de sorte que C^{m-p} est la polaire $p^{\text{ième}}$ de A par rapport à C^m. (Bobillier, *Annales de Gergonne*, tome XVIII, page 89; 1827.)

(*) Le premier travail de M. Chasles date de 1829 (*Correspondance mathématique* de Quetelet, tome V, page 293); l'ouvrage de M. Steiner est de 1832. (*Nouvelles Annales*, tome IX, page 149.)

13. Théorème. *Étant donné le point* A *dans le plan du faisceau* F^m, *les polaires d'ordre p relativement aux courbes du faisceau* F^m *forment un faisceau* F^{m-p} *homographique au faisceau* F^m.

Démonstration. Le faisceau F^m est représenté par l'équation

$$Pz + Q = 0 \quad (\S\ 8),$$

et le faisceau F^{m-p} par l'équation

$$pz + q = 0;$$

donc, etc.

14. Théorème. *Soient n courbes du faisceau* F^m; *ces courbes ont* m^2 *points en commun* (§ 8); *si à chaque point commun on mène des tangentes aux courbes qui y passent, on aura un faisceau de n droites, et par conséquent* m^2 *faisceaux de droites qui sont homographiques.*

Démonstration. L'équation de ces courbes a la forme

$$Pz + Q = 0;$$

l'équation d'une tangente est

$$(Tz + U)(y - y_1) = (Rz + S)(x - x_1),$$

où x_1, y_1 sont les coordonnées du point de contact et R, S, T, U des fonctions entières en x_1, y_1 de degré $m - 1$; les valeurs de ces fonctions sont les mêmes pour toutes les tangentes à un point commun aux n courbes; donc l'équation de la tangente renferme le paramètre *linéaire* z; donc, etc.

15. *Corollaire.* Si l'on prend les n polaires d'ordre p, de n courbes C^m du faisceau F^m par rapport à un point A pris dans le plan du faisceau F^m, on aura n courbes C^{m-p} passant par les mêmes $(m-p)^2$ points; par chacun de ces points passe un faisceau de n tangentes qui est homographique au faisceau des n tangentes qui passe par un des m^2 points communs des n courbes C^m du faisceau F^m.

Faisceaux de surfaces à un paramètre variable linéaire.

16. Si une surface S^m est donnée par une équation de degré m en x, y, z, et si les coefficients de l'équation sont des fonctions linéaires d'un paramètre u, cette équation peut prendre la forme

$$Pu + Q = 0,$$

où P et Q sont des fonctions en x, y, z de degré m. En donnant à u toutes les valeurs comprises entre $+\infty$ et $-\infty$, on a un faisceau de surfaces que nous désignons par φ^m; toutes ces surfaces ont en commun la courbe de degré m donnée par les équations

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

courbe qui est l'*enveloppe* du faisceau. Soit un second faisceau φ^n, représenté par l'équation

$$pu + q = 0,$$

où p et q sont des fonctions de x, y, z de degré n; les surfaces qui, dans les deux faisceaux, sont données par la même valeur de u, sont dites *correspondantes*, et les faisceaux sont dits *homographiques*.

17. Théorème. *Étant donnés deux faisceaux φ^m, φ^n, les intersections des surfaces homographiques sont sur une surface de degré $m+n$.*

Démonstration. Comme au théorème 9.

18. Théorème. *Une surface de degré $m+n$ peut être, généralement parlant, engendrée par les intersections de deux faisceaux homographiques φ^m, φ^n.*

Démonstration. L'équation donnée de la surface de degré $m+n$ renferme

$$\frac{(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)}{1.2.3} - 1 = r \text{ coefficients};$$

l'équation

$$Pq - Qp = 0 \quad (\textit{voir} \text{ ci-dessus})$$

renferme

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)+(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = s \text{ indéterm.}$$

Or $s > r$, on a donc plus d'indéterminées que d'équations.

Observation. Il peut arriver que sur la surface donnée on ne puisse tracer une ligne d'ordre m, ou d'ordre n; alors la question est impossible. Par exemple, soit

$$m = n = 1;$$

on voit qu'on peut construire une surface *réglée* du second degré par les intersections de deux faisceaux homographiques plans; mais il est évident que les surfaces du second degré non réglées ne sont pas susceptibles de cette génération.

19. *Définition : Polaires.* Si d'un point A, pris dans l'espace, on mène un cône tangent à une surface S^m, la ligne de contact est sur une surface S^{m-1} que l'on nomme *première polaire du point* A; la première polaire de A, par rapport à la surface S^{m-1}, est sur une surface S^{m-2} que l'on nomme *seconde polaire de* A, et ainsi de suite.

Observation. Soit

$$f(x, y, z, u) = 0$$

l'équation rendue homogène d'une surface S^m. a, b, c, d étant les coordonnées d'un point dans l'espace, si l'on développe, d'après le théorème de Taylor,

$$f(x+a, y+b, z+c, u+d),$$

le terme $p+1^{\text{ième}}$ de ce développement est

$$\frac{\left(\frac{a\,df}{dx} + \frac{b\,df}{dy} + \frac{c\,df}{dz} + \frac{d\,df}{du}\right)^p}{1.2.3\ldots p},$$

où il faut changer les exposants en indices différentiels; égalant cette expression à zéro, on a l'équation de la polaire d'ordre p, du point a, b, c, d relativement à la surface S^m.

20. Théorème. *Étant donné un point* A *dans l'espace, les surfaces polaires d'ordre p, pris par rapport aux surfaces du faisceau* φ^m, *forment un faisceau* φ^{m-p} *homographique au faisceau* φ^m.

Faisceau de surfaces; deux paramètres variables linéaires.

21. L'équation d'une surface de degré m à deux paramètres variables u, v prend la forme

$$Pu + Qv + R = 0,$$

P, Q, R étant des fonctions de degré m; donnant à u, v toutes les valeurs possibles, on obtient un faisceau φ_2^m où chaque surface passe par les m^3 points donnés par les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0.$$

Deux surfaces prises dans deux faisceaux différents sont *homographiques* lorsqu'elles correspondent aux mêmes valeurs de u et de v.

22. Théorème. *Étant donnés trois faisceaux* φ_2^m, φ_2^n, φ_2^p; *trois surfaces correspondantes se coupent en* mnp *points, situés sur une surface de degré* $m + n + p$.

Démonstration.

$Pu + Qv + R = 0$, équation d'une surface S^m,

$P_1u + Q_1v + R_1 = 0$, équation d'une surface S^n correspond^te^.,

$P_2u + Q^2v + R_2 = 0$, équation d'une surface S^p correspond^te^.

Éliminant u et v, on a une équation de degré $m + n + p$.

Application.

$$m = n = p = 1, \quad m + n + p = 3;$$

ainsi une surface du troisième degré peut se construire par les intersections de trois faisceaux de plans homographiques.

Toutes les surfaces du faisceau φ_2^2 passent par les mêmes huit points, et les intersections de trois de ces faisceaux homographiques sont sur une surface du sixième degré.

Observation. Une surface du second degré et un plan forment un système du troisième degré.

23. THÉORÈME. *Etant données n surfaces du faisceau* F^m; *par chacun des* m^3 *points communs, on peut mener n plans tangents, un à chaque surface; ces n plans se coupant suivant la même droite, forment un faisceau; les* m^3 *faisceaux sont homographiques.*