

**Nouvelles propriétés géométriques et  
mécaniques des surfaces de niveau ;  
d'après M. Jacob Amsler**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 12  
(1853), p. 356-358

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1853\\_1\\_12\\_\\_356\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__356_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOUVELLES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES DES  
SURFACES DE NIVEAU;**

**D'APRÈS M. JACOB AMSLER,**  
De Halden, en Suisse.

(Journal de M. Crelle, tome XLII, page 314; 1851.)

---

1. Soit  $f(x, y, z)$  une fonction des coordonnées rectangulaires  $x, y, z$  qui satisfont à l'équation aux différences partielles,

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2} = 0;$$

alors l'équation

$$f(x, y, z) = \text{constante}$$

représente un système de *surfaces de niveau*.

Soient

$$(1) \quad f(x, y, z) = \alpha_1,$$

$$(2) \quad f(x, y, z) = \alpha_2,$$

deux de ces surfaces, et  $p_1, q_1$  deux points sur la première surface (1). Par  $p_1$  et  $q_1$  on fait passer deux trajectoires du système qui rencontrent la surface (2), respectivement en  $p_2$  et  $q_2$ . Nommons  $p_1$  et  $p_2$  *points correspondants*; de même  $q_1$  et  $q_2$ . On a la proposition suivante :

**THÉORÈME.** *La distance de deux points quelconques des deux surfaces comme  $p_1$  et  $q_2$  est égale à la distance des points correspondants  $p_2, q_1$ .*

(Sans démonstration.)

Au moyen de cette propriété géométrique, on peut démontrer cette proposition de mécanique :

**THÉORÈME.** *Si les surfaces (1) et (2) sont des masses homogènes, l'attraction de la masse de la surface (1) sur le point  $p_2$  de la surface (2) peut se ramener à l'attraction que le point correspondant  $p_1$  éprouve de la part de la masse (2).*

Soient  $V_1$  le potentiel de l'action sur  $p_2$ , et  $V_2$  le potentiel de l'action sur  $p_1$ ; on aura

$$\begin{aligned} & \frac{dV_1}{dx_1} f'(x_1) + \frac{dV_1}{dy_1} f'(y_1) + \frac{dV_1}{dz_1} f'(z_1) \\ & \quad \frac{f'(x_1)^2 + f'(y_1)^2 + f'(z_1)^2}{=} \\ & \frac{dV_2}{dx_2} f'(x_2) + \frac{dV_2}{dy_2} f'(y_2) + \frac{dV_2}{dz_2} f'(z_2) \\ & \quad \frac{f'(x_2)^2 + f'(y_2)^2 + f'(z_2)^2}{=} , \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dV_1}{d\alpha_1} = \frac{dV_2}{d\alpha_2}.$$

Cette proposition a lieu pour toute loi d'attraction qui ne

dépend que de la distance. C'est une généralisation du théorème d'Ivory dans la théorie de l'attraction des ellipsoïdes et de l'extension donnée à ce théorème par Poisson.

Les démonstrations sont à trouver.