NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Solution de la question 167

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 34-36

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__34_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 167

(voir t. VI, p. 394);

PAR M. H. FAURE.

On sait que le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur les tangentes a pour équation polaire

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3}\omega,$$

l'équation de l'hyperbole équilatère étant

$$a^2 = \rho^2 \cos 2\omega.$$

M. W. Roberts propose de démontrer que la longueur d'un quadrant de cette podaire est égale à trois fois la différence entre l'arc infini de l'hyperbole équilatère et son asymptote.

Cette question se trouve résolue par l'auteur, dans le tome X des *Annales* de M. Liouville; il l'a déduite d'une proposition plus générale, au moyen des fonctions elliptiques. Nous allons la démontrer, en suivant une autre marche que nous appliquerons à l'équation $a^m = \rho^m \cos m\omega$, qui comprend l'hyperbole équilatère comme cas particulier. On reconnaît facilement la forme de cette courbe; elle se compose de m branches infinies, ayant pour asymptotes des droites qui font avec l'axe polaire des angles égaux à $\frac{\pi}{2m}, \frac{3\pi}{2m}, \frac{5\pi}{2m}, \ldots, \frac{(2m-1)\pi}{2m}$. On trouve pour équation de la première podaire,

$$\rho^{\frac{m}{m-1}} = a^{\frac{m}{m-1}} \cos \frac{m}{m-1}\omega.$$

Si l'on projette de même le centre de notre courbe sur la tangente à celle-ci, on trouvera, pour la deuxième podaire,

$$\rho^{\frac{m}{2m-1}} = a^{\frac{m}{2m-1}} \cos \frac{m}{2m-1}\omega.$$

Soit E l'excès de la longueur d'une asymptote de la courbe représentée par $a^m = \rho^m \cos m\omega$, sur la branche de courbe correspondante, et soit S la longueur d'une demi-boucle de la deuxième podaire. Nous allons démontrer que

$$\mathrm{E} = \frac{m-1}{2m-1}\mathrm{S}.$$

En effet, si l'on calcule l'arc de la podaire d'après la formule

$$\mathrm{S} = \int \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2},$$

on trouvera

$$\mathrm{S} = a(2m-1)\int \frac{z^{2m-2}\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}},$$

en posant

$$\rho = az^{2m-1}.$$

La même formule donne, pour l'arc de l'autre courbe,

$$\mathrm{S}' = -a\int \frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^{2m}}},$$

en posant

$$\rho = \frac{a}{z}.$$

Or

$$-a\int \frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^{2m}}} = \frac{a\sqrt{1-z^{2m}}}{2} + (m-1)a\int \frac{z^{2m-2}\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}}.$$

Pour avoir la différence entre deux longueurs très-considérables, portées, la première, sur l'asymptote, à partir du centre, et la seconde sur la courbe $a^m = \rho^m \cos m\omega$, à partir du sommet, il faut voir ce que devient la différence $\rho - \mathrm{S}$ lorsque ρ est infini, ou $\frac{a}{z} - \mathrm{S}'$ pour $z = 0$. Or

$$\frac{a}{z} - \mathrm{S}' = \frac{a}{z} - \frac{a\sqrt{1 - z^{2m}}}{z} - (m-1)a\int \frac{z^{2m-2}\,dz}{\sqrt{1 - z^{2m}}} = \mathrm{E}.$$

Nos intégrales doivent être prises entre 0 et 1. Entre ces limites, les deux quantités qui précèdent le signe $\int$ s'évanouissent; donc,

$$\mathrm{E} = -(m-1)a\int \frac{z^{2m-2}\,dz}{\sqrt{1 - z^{2m}}}.$$

Par suite, puisqu'il faut renverser les limites pour l'une ou l'autre de ces intégrales,

$$\mathrm{E} = \frac{m-1}{2m-1}\mathrm{S}.$$

Dans le cas particulier de la question, il faut faire

$$m = 2,$$

ce qui donne

$$\mathrm{E} = \frac{1}{3}\mathrm{S}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{S} = 3\mathrm{E}.$$