Nouvelles annales de mathématiques

Sur la quadrature du cercle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 298-302

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__298_1>

SUR LA QUADRATURE DU CERCLE.

Montucla a publié, en 1752, une histoire des *recherches sur la quadrature du cercle*. Cet ouvrage a été reproduit avec des augmentations sous forme de Supplément au quatrième volume de l'*Histoire des Mathématiques*, du même auteur (1802), volume qui est en partie posthume, l'auteur étant mort en 1799, et qui a été continué par le célèbre astronome Lalande (*). On y lit (page 630) qu'un certain officier de cavalerie au service d'Autriche, nommé M. de Leistner, prétendit avoir trouvé la valeur *exacte*

$$\pi = \frac{3844}{1225} = \frac{62^2}{35^2}.$$

Soumise à l'examen d'une Commission impériale, cette valeur fut reconnue inexacte. Marinoni, auteur d'un ouvrage de géodésie et cité par M. Chasles (*Histoire des Méthodes*, page 446), était rapporteur. En effet, $\frac{3844}{1225} = 3,138\ldots$ Lambert, qui raconte le même fait, indique une suite de fractions s'approchant sans cesse de π, et dont les deux termes sont des carrés parfaits. On a

$$\sqrt{\pi} = 1,7724538507 5 = m,$$

$$\frac{2}{m} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{26}}}}}}};$$

réduisant la fraction continue, on obtient, pour $\frac{m}{2}$,

$$\text{(A)} \qquad \frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \frac{31}{35},\ \frac{39}{44},\ \frac{109}{123},\ \frac{148}{167},\ \frac{3848}{4342}.$$

(*) Lalande etait un astronome, et toutefois, chose aujourd'hui singulière, il a publié un Traité, en quatre volumes in-4°, d'*Astronomie*.

Carrant les doubles de ces fractions, on obtient, pour π,

$$\left(\frac{14}{8}\right)^2,\quad \left(\frac{16}{9}\right)^2,\quad \left(\frac{62}{35}\right)^2,\quad \left(\frac{178}{44}\right)^2,$$
$$\left(\frac{218}{123}\right),\quad \left(\frac{296}{167}\right)^2,\quad \left(\frac{7296}{4342}\right)^2,$$

ou

$$\frac{196}{64},\quad \frac{256}{81},\quad \frac{3844}{1225},\quad \frac{6084}{1936},\quad \frac{47524}{15129},\quad \frac{87616}{27889},\quad \frac{59228416}{18842964};$$

la série A exprime le côté du carré équivalent au *cercle* dont le diamètre est 1, et les fractions inverses de cette série expriment la valeur du diamètre d'un cercle dont l'aire est 1. On a, dans cette même série,

$$\frac{167}{148} = 1,1283784.$$

En calculant la valeur du diamètre pour la valeur ordinaire de π, on trouve 1,1283790; la différence n'est que de 0,0000006, de sorte que cette fraction $\frac{167}{148}$ est utile dans le jaugeage des cylindres. Lambert fait aussi cette observation curieuse :

$$\frac{\pi}{4} = 0,7853981634 = a,$$
$$\frac{1}{a} = 1 + \frac{0,2146018366}{a} = 1 + \frac{b}{a},$$
$$\frac{a}{b} = 3 + \frac{0,1415926536}{b} = 3 + \frac{c}{b},$$
$$3 + c = \pi.$$

La raison de ce fait est évidente.

Tout ce qui précède est consigné dans le tome II (première partie, p. 140; 1770) des excellents documents que Lambert a publiés de 1765 à 1772 pour l'usage des mathématiques et de leurs applications. L'article cité est adressé à ceux qui recherchent la quadrature du cercle, et il débute ainsi :

» Je puis avoir quelques raisons de douter si la présente dissertation sera lue ou même comprise par ceux qui y devraient prendre le plus d'intérêt; je parle de ceux qui mettent leur temps et leurs soins à chercher la quadrature du cercle. Il est assez certain qu'il y aura toujours beaucoup de ces gens-là, et, si l'on doit juger de l'avenir d'après le passé, ce seront toujours des hommes qui, sachant peu de chose de la géométrie, se font une idée fausse de leur propre mérite intellectuel, et, ce qui leur manque du côté des connaissances et de l'intelligence, ils le remplacent par des sophismes qui, souvent, ne sont ni très-fins ni très-cachés. »

Lambert observe que la valeur de π est renfermée entre ces deux fractions

$$\frac{336851849443403}{1072232736857129}, \quad \frac{324521540032945}{101951448609914};$$

la première est trop petite; la seconde, trop grande, est plus approchée que la première : on sait, de plus, qu'entre les deux, il n'existe pas de quantité rationnelle plus approchée que la plus grande de ces fractions; donc, s'il existe un rapport rationnel pour π, ses deux termes doivent surpasser les deux termes de la seconde fraction. D'ailleurs Lambert a démontré le premier (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1761) que π et π^2 sont des quantités irrationnelles. Legendre, améliorant cette démonstration, en a fait l'objet d'une Note à la suite de sa Trigonométrie; toutefois, il est certain qu'il existe une droite égale en longueur à une circonférence donnée; mais si l'on parvient jamais à construire cette longueur, son rapport avec le diamètre correspondant et le carré de ce rapport seront incommensurables. On ne voit pas comment la géométrie, livrée à elle-même, pourrait établir cette incommensurabilité, ainsi qu'on le fait pour le rapport du côté du carré à la diagonale et pour d'autres incommensurabilités quadratiques qui sont le sujet du dixième livre d'Euclide. D'après un récent travail du savant géomètre arabiste, M. Woepke, il paraîtrait que les Grecs connaissaient des incommensurables d'un degré plus élevé que le second.

Lorsqu'il s'est agi de l'article Lambert pour le dictionnaire Michaud, Lacroix me disait qu'il ne connaissait à Paris qu'un seul géomètre capable d'écrire cette biographie. C'était mon ami Servois, alors conservateur du Musée d'Artillerie. C'est, en effet, un morceau fait de main de maître, dans cette célèbre collection. Nous donnerons une notice biographique sur Servois, un des premiers promoteurs de la géométrie segmentaire.