Nouvelles annales de mathématiques

George Salmon

Sur les propriétés des surfaces du second degré qui correspondent aux théorèmes de Pascal et de M. Brianchon, dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 287-289

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__287_1>

SUR LES PROPRIÉTÉS

Des surfaces du second degré qui correspondent aux théorèmes de Pascal et de M. Brianchon, dans les coniques;

D'APRÈS M. GEORGE SALMON.

(Philosophical Magazine, t. XXIV, p. 49; 1844.)

---

1. Soient

$$S = 0$$

l'équation d'une conique A;

$$L = 0, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0$$

les équations de trois droites;

$$S - L^2 = 0, \quad S - L_1^2 = 0, \quad S - L_2^2 = 0$$

seront les équations de trois coniques B, C, D qui ont un double contact avec la conique A; A et B se touchent aux points où la droite L rencontre la conique A; A et C aux points où la droite L_1 coupe A, etc.: les deux co-

---

(*) Prochainement, une démonstration de ce théorème *généralisé*.

niques

$$\left.\begin{array}{l}\text{B et C}\\ \text{B et D}\\ \text{C et D}\end{array}\right\}\text{ ont évidemment pour cordes d'intersection }\left\{\begin{array}{ll}L+L_1=0, & L-L_1=0;\\ L+L_2=0, & L-L_2=0;\\ L_1+L_2=0, & L_1-L=0.\end{array}\right.$$

Les trois premières droites et les trois dernières

$$L-L_1=0,\quad L_1-L_2=0,\quad L-L_2=0,$$
$$L-L_1=0,\quad L_1+L_2=0,\quad L+L_2=0,$$

passent respectivement par le même point.

De là, ce théorème :

Si trois coniques ont un double contact avec une quatrième conique, leurs six cordes d'intersection passent trois à trois par le même point; si chacune des trois coniques devient un système de deux droites, on a le théorème de M. Brianchon directement, et la réciproque donne le théorème de Pascal.

Observation. Les quatre droites représentées par

$$L-L_1=0,\quad L-L_2=0,\quad L=0,\quad L_1=0,$$

forment un faisceau harmonique.

2. Supposons maintenant que $S=0$ soit l'équation d'une surface du second degré, et que

$$L=0,\quad L_1=0,\quad L_2=0$$

soient les équations de trois plans. On démontre comme ci-dessus, le théorème suivant :

Si deux surfaces B *et* C *du second degré sont enveloppées par une troisième surface* A, *les surfaces* B *et* C *se couperont suivant deux courbes planes; ces deux plans et les deux plans de contact avec la surface forment un faisceau harmonique.*

Si trois surfaces du second degré B, C, D *sont enveloppées par une quatrième surface* A, *les plans d'intersection mutuelle* B, C, D *passent par le point d'inter-*

section des trois plans de contact, et elles passent trois à trois par les mêmes lignes droites.

Supposons que les surfaces B, C, D deviennent des cônes, nous aurons un théorème analogue à celui de M. Brianchon.

Réciproque de ce théorème :

Si l'on fait trois sections planes dans une surface du second degré, on peut faire passer deux cônes par deux quelconques de ces plans; les six sommets de ces six cônes sont dans un même plan et trois à trois sur une même droite, et forment ainsi les angles d'un quadrilatère complet.

Ce théorème est analogue à celui de Pascal. En effet, soient ABCDEF un hexagone inscrit dans une conique et G l'intersection des côtés opposés AB, DE; H l'intersection des côtés opposés BC, EF; K l'intersection des côtés opposés CD, FA. Imaginons maintenant que la conique représente une surface du second degré, et que AD, BE, CF représentent trois sections planes: ABGDE, BCHEF, CDKFA sont les trois cônes qui renferment ces sections, et les trois sommets G, H, K sont en ligne droite.