WILLIAM-ROWAN HAMILTON

Sur les quaternions

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 275-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__275_1>

SUR LES QUATERNIONS

DE SIR WILLIAM-ROWAN HAMILTON,
Professeur d'astronomie à l'Université de Dublin, astronome royal d'Irlande (*).

Nous croyons devoir déclarer que nous n'avons pas une opinion formée sur la valeur scientifique de cette théorie, et cela parce que nous ne l'avons pas suffisamment étudiée, n'ayant pas à notre disposition les écrits qui en traitent; mais nous croyons déjà être en état de donner

(*) Aujourd'hui, en France, les astronomes croient déroger en s'occupant des mathématiques *pures*. Heureux s'ils ne s'en déclarent pas les contempteurs! L'illustre directeur de l'Observatoire de Paris n'a osé prendre ces sciences *pures* sous son égide, qu'en montrant qu'elles ne s'opposent pas à la formation d'habiles ingénieurs et de bons officiers (*voir* sur l'*ancienne École Polytechnique*, 1853). A ce propos, on regrette que dans cet estimable opuscule, on ait omis, sans doute involontairement, le nom d'un ancien élève que le monde militaire et même la voix populaire proclament un des plus célèbres artilleurs de notre époque. Qui ne connaît pas les canons du général Paixhans?

à nos lecteurs l'idée d'une méthode qui commence à être cultivée chez nos voisins d'outre-Manche, et qui se rattache aux fécondes applications de la théorie des imaginaires, à la science de l'espace; applications qui sont le complément indispensable de la géométrie cartésienne.

Ce qui suit est extrait du *Philosophical Magazine*, t. XXV, juin-décembre 1844.

1. *Définition.* L'expression

$$Q = w + ix + jy + kr$$

est dite un *quaternion*, lorsque les quatre quantités w, x, y, z désignent des quantités réelles, positives, négatives ou nulles, et que les trois quantités i, j, k désignent des quantités imaginaires, soit $+\sqrt{-1}$, soit $-\sqrt{-1}$.

w, x, y, z sont les quantités *constituantes* du quaternion, et i, j, k *les unités imaginaires* du quaternion.

Observation. Chaque quaternion est donc susceptible de huit valeurs.

2. *Égalité de quaternions.* Soit un second quaternion

$$Q' = w' + ix' + jy' + kz';$$

si l'on a

$$Q = Q',$$

cette équation entraîne les quatre autres

$$w = w', \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

3. *Addition et soustraction.*

$$Q \pm Q' = w \pm w' + i(x \pm x') + j(y \pm y') + k(z \pm z').$$

Ainsi *la somme ou la différence des constituants de deux quaternions sont les constituants de la somme ou de la différence des quaternions.*

4. *Produit de deux quaternions.* Prenant Q comme

multiplicateur, et Q′ comme *multiplicande,* on obtient

$$\begin{aligned}QQ' = & ww' + iwx' + jwy' + kwz' \\ & + ixw' + i^2xx' + ijxy' + ikxz' \\ & + jyw' + jiyx' + j^2yy' + jkyz' \\ & + kzw' + kizx' + kjzy' + k^2zz'.\end{aligned}$$

Pour ramener ce produit à la forme normale adoptée

$$QQ' = Q'' = w''' + ix''' + jy''' + kz''',$$

nous écrirons

$$\text{(A)} \qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$\text{(B)} \qquad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

$$\text{(C)} \qquad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Les équations (A) ne donnent lieu à aucune observation; mais dans les équations (B) et (C) on voit que ij et ji sont de signes opposés; ce qui n'a pas lieu dans les imaginaires ordinaires : cette différence *conventionnelle* constitue le caractère d'une nouvelle espèce d'imaginaires, d'unités *imaginaires quaternionnes,* si l'on veut. En continuant, on en verra le but et l'utilité.

Au moyen des relations (A), (B), (C), on trouve

$$\text{(D)} \qquad \left\{\begin{aligned} w'' &= ww' - xx' - yy' - zz', \\ x'' &= wx' + xw' + yz' - zy', \\ y'' &= wy' + yw' + zx' - xz', \\ z'' &= wz' + zw' + xy' - yx'. \end{aligned}\right.$$

Observation. On n'a pas $QQ' = Q'Q$ comme dans la théorie ordinaire (*voir,* à la fin, la *division des quaternions*).

5. Posons

$$\text{(E)} \qquad \left\{\begin{aligned} w &= \mu \cos\theta, \\ x &= \mu \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= \mu \sin\theta \sin\varphi \cos\psi, \\ z &= \mu \sin\theta \sin\varphi \sin\psi. \end{aligned}\right.$$

De même quatre équations semblables pour le quaternion Q' et Q''; on suppose μ, μ', μ'' des quantités positives. On aura

$$(\text{F}) \qquad \mu'' = \mu\mu',$$

car

$$w''^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 = (w^2 + x^2 + y^2 + z^2)(w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) \text{ [*]}.$$

6. *Définitions.*

μ = module du quaternion ;
$\mu \sin \theta$ = rayon vecteur du quaternion ;
ψ = longitude du quaternion ;
φ = colatitude (complément de la latitude) du quaternion ;
θ = amplitude du quaternion.

7. L'équation (F) s'énonce ainsi : *Le module du produit* Q'' *de deux quaternions* Q *et* Q' *est égal au produit de leurs modules.*

8. Les équations (D) donnent les deux suivantes :

$$w'w'' + x'x'' + y'y'' + z'z'' = w\,(w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) = w\mu'^2,$$
$$ww'' + xx'' + yy'' + zz'' = w'(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) = w^2\mu^2.$$

Au moyen de ces deux équations, de la première des équations (D), et à l'aide des équations (F), on déduit

$$(\text{G})\left\{\begin{aligned}
&\cos\theta = \cos\theta'\cos\theta'' \\
&\quad + \sin\theta'\sin\theta''[\cos\varphi'\cos\varphi'' + \sin\varphi'\sin\varphi''\cos(\psi' - \psi'')], \\
&\cos\theta' = \cos\theta''\cos\theta \\
&\quad + \sin\theta''\sin\theta[\cos\varphi''\cos\varphi + \sin\varphi''\sin\varphi\cos(\psi'' - \psi)], \\
&\cos\theta'' = \cos\theta\cos\theta' \\
&\quad - \sin\theta\sin\theta'[\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\psi - \psi')].
\end{aligned}\right.$$

9. *Construction géométrique des équations* (G). Considérons x, y, z comme les trois coordonnées rectangulaires d'un point M dans l'espace ; soient $\mu \cos\theta$ le rayon

(*) Ce théorème n'est pas nouveau et a reçu une grande extension.

vecteur du point compté de l'origine O, ψ la longitude, et φ la colatitude. Concevons une sphère ayant l'origine O pour centre, et d'un rayon $= 1$; et soit R le point où cette sphère est rencontrée par le rayon vecteur OM ; nous appelons ce point R, *le point représentatif* du quaternion Q. Soient R' et R'' les points représentatifs des quaternions Q' et Q'' ; alors les équations (G) expriment que, *dans le triangle sphérique* R R' R'' *formé par les points représentatifs de deux facteurs* Q *et* Q' *et de leur produit* QQ', *les angles* R, R' *sont les amplitudes de deux facteurs, et l'angle* R'' *est le supplément de l'amplitude du produit*, c'est-à-dire que l'on a

$$(\mathrm{H}) \qquad \mathrm{R} = \theta, \quad \mathrm{R}' = \theta', \quad \mathrm{R}'' = \pi - \theta''.$$

10. Si dans les équations (B), (C) on avait posé

$$kj = i, \quad ji = k, \quad ik = j, \quad jk = -i, \quad ij = -k, \quad ki = -j,$$

alors, dans les équations (D), $yz' - zy'$ se serait changé en $zy' - yz'$, $zx' - xz'$ en $xz' - zx'$, $xy' - yx'$ en $yx' - xy'$; mais les équations (F) et (H), si simples et si mnémoniques, seraient restées les mêmes, et elles suffisent pour déterminer la position du point R'', en ayant égard à la direction positive de la rotation en longitude, selon qu'elle se fait à droite ou à gauche d'un spectateur placé dans l'axe $+z$. OR'' est à la droite ou à la gauche de OR', par rapport à un spectateur placé en OR, selon que $+z$ est à la droite ou à la gauche de $+y$, par rapport à un spectateur placé en $+x$.

11. Soient

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma; \quad \alpha', \ \beta', \ \gamma'; \quad \alpha'', \ \beta'', \ \gamma,$$

les coordonnées rectangulaires respectives des points R, R', R'' ; on a évidemment pour la multiplication des deux quaternions,

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned}&[\cos R+(i\alpha+j\beta+k\gamma)\sin R][\cos R'+(i\alpha'+j\beta'+k\gamma')\sin R']\\&\qquad=-\cos R''+(i\alpha''+j\beta''+k\gamma'')\sin R'';\end{aligned}\right.$$

effectuant la multiplication, ayant égard aux relations (A), (B), (C), on obtient

$$(\mathrm{K})\left\{\begin{aligned}-\cos R''&=\cos R\cos R'+(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')\sin R\sin R',\\ \alpha''\sin R''&=\alpha\sin R\cos R'+\alpha'\sin R'\cos R+(\beta\gamma'-\gamma\beta')\sin R\sin\\ \beta''\sin R''&=\beta\sin R\cos R'+\beta'\sin R'\cos R+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')\sin R\sin\\ \gamma''\sin R''&=\gamma\sin R\cos R'+\gamma'\sin R'\cos R+(\alpha\beta'-\beta\alpha')\sin R\sin\end{aligned}\right.$$

La première équation donne la relation connue entre un côté et les trois angles d'un triangle sphérique; les trois autres correspondent à ce théorème :

Si trois forces sont appliquées au centre O, *l'une égale à* $\sin R\cos R'$ *et dirigée vers* R, *et une seconde force égale à* $\sin R'\cos R$ *et dirigée vers* R', *et une troisième force* $\sin R\sin R'\sin RR'$ *dirigée dans le sens opposé à* OR'', *la résultante sera égale à* $\sin R''$, *et sera dirigée vers le pôle de l'arc* RR' *non situé du même côté que le point* R'' *relativement à l'arc* RR'.

Les quatre équations réelles (K) sont contenues dans l'équation imaginaire (I), en observant la règle de multiplication des quaternions; de même dans la trigonométrie plane, on déduit les formules fondamentales au moyen de la somme des sinus et cosinus d'une équation imaginaire, en observant la règle de multiplication des *couples* imaginaires $\cos\theta+i\sin\theta$ posant $i^2=-1$. On a ainsi un *algorithme spécial* pour la trigonométrie sphérique.

12. On a

$$Q^2=w^2-x^2-y^2-z^2+2w(ix+jy+kz),$$

en ayant égard aux équations (A), (B), (C) : donc, pour que Q^2 soit égal à 1, il faut que l'on ait

$$w = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

alors

$$\mu = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

et

(L) $$\sqrt{-1} = i \cos \varphi + j \sin \varphi \cos \psi + k \sin \varphi \sin \psi.$$

φ et ψ étant arbitraires, on voit que $\sqrt{-1}$ correspond à une infinité d'expressions quaternionnes.

13. Si dans l'équation (I) on fait

$$R = R' = \frac{\pi}{2},$$

alors le point R″ est le pôle de l'arc RR′, l'angle R a pour mesure RR′, et l'on a

(M) $$\left\{\begin{array}{l} \quad (i\alpha + j\beta + k\gamma)(i\alpha' + j\beta' + k\gamma') \\ = -\cos RR' + (i\alpha'' + j\beta'' + k\gamma'')\sin RR'. \end{array}\right.$$

Si l'on change α, β en α', β', et *vice versâ*, α'', β'', γ'' changent de signe, et l'on a

(N) $$\left\{\begin{array}{l} \quad (i\alpha' + j\beta' + k\gamma')(i\alpha + j\beta' + k\gamma') \\ = -\cos RR' - (i\alpha'' + j\beta'' - k\gamma'')\sin RR'; \end{array}\right.$$

écrivons

$$i\alpha + j\beta + k\gamma = i_R,$$
$$i\alpha' + j\beta' + k\gamma' = i_{R'};$$

alors on aura

(O) $$\mu(\cos\theta + i_R \sin\theta) \times \mu(\cos\theta - i_R \sin\theta) = \mu^2,$$

(P) $$i_R\, i_{R'} \cdot i_{R'}\, i_R = 1,$$

car

$$(i_R)^2 = (i_{R'})^2 = -1.$$

Les quaternions $i_R i_{R'}$ et $i_{R'} i_R$ sont dits *réciproques* l'un de l'autre.

Observation. Cela ne s'applique qu'aux quaternions pour lesquels la partie réelle w est nulle.

14. $i.jk = i.i = -1$, $ij.k = k.k = -1$; donc

$$i.jk = ij.k,$$

de même

$$j.ji = j.-k = -jk = -i, \quad jj.i = -i;$$

donc

$$j.ji = jj.i;$$

de là on conclut Q, Q′, Q″, désignant des quaternions complets :

$$(\mathrm{Q}) \qquad \mathrm{Q}.\mathrm{Q}'\mathrm{Q}'' = \mathrm{QQ}'.\mathrm{Q}'',$$

de même

$$(\mathrm{Q}') \qquad \mathrm{Q}.\mathrm{Q}'\mathrm{Q}''\mathrm{Q}''' = \mathrm{QQ}'.\mathrm{Q}''\mathrm{Q}''' = \mathrm{QQ}'\mathrm{Q}''.\mathrm{Q}''';$$

par conséquent,

$$i_R i_{R'}.i_{R'} i_R = i_R i_{R'} i_{R'}.i_R = -i_R.i_R = 1,$$

comme ci-dessus.

15. Les théorèmes exprimés dans les formules (Q) et (Q′) sont d'une grande importance dans le *calcul des quaternions*; ils tendent, autant que possible, à assimiler ce système de calcul à celui qui est employé dans l'algèbre ordinaire. Dans la multiplication ordinaire on peut partager chaque facteur en un nombre quelconque de parts, réelles ou imaginaires, et réunir ensuite les produits partiels; la même chose a lieu en opérant sur les quaternions. La *multiplication-quaternionne* possède le caractère *distributif* de la multiplication ordinaire : ainsi l'on a

$$\mathrm{Q}(\mathrm{Q}' + \mathrm{Q}'') = \mathrm{QQ}' + \mathrm{QQ}''; \; (\mathrm{Q}' + \mathrm{Q}'')\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'\mathrm{Q} + \mathrm{Q}''\mathrm{Q}, \text{ etc.};$$

mais dans l'algèbre ordinaire l'on a

$$QQ' = Q'Q.$$

« Cette égalité du produit des facteurs, pris dans un ordre inverse, ne subsiste pas pour les quaternions ($ji = -ij$); le caractère *commutatif* se perd en passant dans la nouvelle manière d'opérer, et $Q'Q - QQ'$, au lieu d'être un symbole de zéro, représente une quantité imaginaire *pure*. D'un autre côté, pour les quaternions aussi bien que pour les facteurs ordinaires, nous pouvons, en général, *associer ensemble les facteurs, par groupes, de toutes les manières qui ne troublent pas leur ordre*; par exemple,

$$Q.Q'Q''.Q'''Q^{\text{IV}} = QQ'.Q''Q'''Q^{\text{IV}}.$$

Ainsi ce qu'on peut appeler le caractère *associatif* de l'opération, ainsi que le caractère *distributif*, sont *communs* aux quantités algébriques ordinaires. »

(*Traduction littérale.*)

Le même volume du *Magasin philosophique* (p. 489) contient une Lettre très-intéressante de sir Hamilton à son savant ami M. Jones Graves, où l'illustre géomètre trace la suite des idées qui l'ont mené au système des quaternions. On y trouve cette observation :

Division des quaternions. Les équations (D) donnent

$$\begin{aligned}
w' &= (ww'' + xx'' + yy'' + z'z'')\,(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1},\\
x' &= (wx'' + zy'' - w''x - yz'')\,(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1},\\
y' &= (xz'' + wy'' - yw'' - zx'')\,(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1},\\
z' &= (yz'' + wz'' - zw'' - xy'')\,(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1};
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que *le module du quotient est le quotient des modules.*

Observation. La théorie des quaternions est la clef des *clefs algébriques* de M. Cauchy et y a évidemment donné naissance (*Comptes rendus*, 1853, 10 janv., p. 70, et 17 janv., p. 129). *Suum cuique!*