Nouvelles annales de mathématiques

Théorèmes segmentaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 272-275

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__272_1>

THÉORÈMES SEGMENTAIRES.

1. *Lemme.* Si les trois coefficients de l'équation d'une droite sont des fonctions algébriques entières de degré m d'une variable, l'enveloppe de la droite est une ligne de degré $m(m-1)$.

Si $m = 1$, l'enveloppe est un point et les droites forment un faisceau.

Si $m = 2$, l'enveloppe est une conique.

2. Problème. *Soit*

$$y(az+\alpha)+x(bz+\beta)+cz+\gamma=0$$

l'équation d'une droite variant avec z; a, α, b, β, c, γ *sont des constantes: quel est le rapport anharmonique de quatre de ces droites?*

Solution. Ce rapport anharmonique est le même que celui des quatre points d'intersection du faisceau avec l'un des axes, par exemple celui des x; les coordonnées de ces points sont

$$-\frac{cz_1+\gamma}{bz_1+\beta},\quad -\frac{cz_2+\gamma}{bz_2+\beta},\quad -\frac{cz_3+\gamma}{bz_3+\beta},\quad -\frac{cz_4+\gamma}{bz_4+\beta};$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont des valeurs particulières de z.

Désignant ces quatre quantités par m_1, m_2, m_3, m_4, un rapport anharmonique est

$$\frac{(m_3-m_1)(m_4-m_2)}{(m_4-m_1)(m_3-m_2)}.$$

Or

$$m_3 - m_1 = \frac{c\beta(z_1 - z_3)}{(bz_1 + \beta)(bz_3 + \beta)};$$

on calcule de même les trois autres binômes. On conclut de là que le rapport anharmonique cherché est

$$\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}.$$

Ainsi ce rapport dépend uniquement des valeurs particulières de la variable z, et il est indépendant des quantités constantes.

3. Théorème. *Si les six coefficients de l'équation d'une conique sont des fonctions linéaires d'une seule variable z; en donnant à z quatre valeurs particulières, on obtient quatre coniques; les quatre polaires d'un point quelconque (x', y'), relativement à ces quatre coniques, forment un faisceau dont le rapport anharmonique est indépendant de la position du point (x', y').*

Démonstration. L'équation de la polaire est

$$\begin{aligned} &y(2Ay' + Bx' + D) + x(2Cx' + By' + E) \\ &\quad + Dy' + Ex' + zF = 0; \end{aligned}$$

ces trois coefficients sont donc des fonctions linéaires de la variable z; donc, etc

Corollaire. Si $B = z$ et si les cinq autres coefficients sont constants, l'équation représente le système de coniques passant par quatre mêmes points dont deux sont sur l'axe des x et deux sur l'axe des y; on a donc ces deux théorèmes connus :

1°. *Quand plusieurs coniques passent par quatre mêmes points, les polaires d'un cinquième point, prises par rapport à ces courbes, passent toutes par un même point.* (Lamé, *Examen des différentes Méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*; 1818.)

2°. *Les polaires relatives aux quatre coniques ont le même rapport anharmonique, quel que soit le cinquième point.*

Ce rapport est

$$\frac{(B_3 - B_1)(B_4 - B_2)}{(B_4 - B_1)(B_3 - B_2)}.$$

(CHASLES, *Comptes rendus*, 30 mai 1835, page 948.) Le célèbre géomètre emploie ces théorèmes pour résoudre une question dont la solution est désirée depuis Newton : Étant donnés neuf points d'une courbe du troisième ordre, construire *géométriquement* l'intersection de la courbe par une droite passant par un quelconque des neuf points.

4. *Lemme*. Lorsque les quatre coefficients de l'équation d'un plan sont des fonctions linéaires d'une seule et même variable u, cette équation représente le système de plans passant par la même droite et formant un faisceau planaire. Le rapport anharmonique de ce faisceau ne dépend que des valeurs particulières de la variable u.

Démonstration. Soit

$$ax + by + cz + d = 0;$$

a, b, c, d sont des fonctions linéaires d'une variable u. L'équation peut se mettre sous la forme

$$Pu + Q = 0;$$

P et Q étant des fonctions linéaires de x, y, z; donc, etc.

5. THÉORÈME. *Si les dix coefficients d'une équation générale d'une surface du second degré sont des fonctions linéaires d'une variable u; en donnant à cette variable quatre valeurs particulières, on obtient quatre surfaces; les quatre plans polaires d'un point quelconque (x', y', z'), pris par rapport à ces surfaces, forment un faisceau planaire dont le rapport anharmo-*

nique est indépendant de la position du point (x', y', z').

Même démonstration que ci-dessus et conséquences analogues.

6. *Lemme.* Lorsque les quatre coefficients de l'équation d'un plan sont des fonctions linéaires de deux variables u et v, cette équation représente le système de plans passant par le même point et formant une surface conique.

7. Théorème. *Si les dix coefficients d'une équation du second degré sont des fonctions linéaires de deux variables u et v; en donnant à ces variables des valeurs particulières, les plans polaires d'un point* (x', y', z'), *pris par rapport à ces surfaces, passent par un même point.*