NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PÉPIN

Démonstration d'un théorème de M. J. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 257-259

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__257_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. J. STEINER (*)

(voir t. XII, p. 118) ;

PAR M. L'ABBÉ PEPIN,
Du petit séminaire d'Iseure.

Le point A se meut sur une droite perpendiculaire sur le milieu de BC; le point a se meut de même sur une droite perpendiculaire élevée sur le milieu de bc; les triangles ABC, abc sont dans un même plan, et l'angle BAC est constamment égal à bac. L'axe radical des deux cercles circonscrits aux deux triangles a pour enveloppe deux points fixes : l'un correspondant aux mouvements qui ont lieu dans le même sens, et l'autre à ceux qui ont lieu dans des sens opposés. (STEINER.)

Prenons pour axe des x la droite qui joint les milieux D, d de BC et de bc, et pour axe des y une perpendiculaire élevée sur le milieu O de la droite Dd. Soient Π et ϖ les angles formés avec la direction Dd par les parties des perpendiculaires DA et da qui s'étendent du côté des y positives.

Les demi-droites AB et AC forment au point A deux angles, dont l'un est l'angle BAC du triangle, et l'autre est égal à 2π — BAC; nous désignerons par α celui de ces deux angles qui s'étend du côté des y négatives, de sorte que l'angle α variera de 0 à 2π, tandis que l'ordonnée du point A passera de $+\infty$ à $-\infty$. Nous désignerons par α' l'angle analogue pour le triangle abc. Ainsi on aura

$$\alpha' = \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha' = 2\pi - \alpha,$$

(*) M. Hen. Dellac, maître d'études au collége de Rochefort, a envoyé une autre solution et fait la bonne observation que l'enveloppe de la droite des centres est une parabole.

suivant que les mouvements auront lieu dans le même sens ou dans des sens opposés.

Posons

$$BC = 2A, \quad bc = 2a, \quad Dd = 2d,$$

et désignons par Γ, Δ, R; γ, δ, r, les coordonnées du centre et le rayon de chacun des deux cercles circonscrits. L'axe radical aura pour équation

$$2(\Gamma - \gamma)x + 2(\Delta - \delta)y - (\Gamma^2 + \Delta^2 - R^2) + (\gamma^2 + \delta^2 - r^2) = 0;$$

d'ailleurs on aura

$$\begin{aligned} R &= \frac{\pm A}{\sin\alpha}, & r &= \frac{\pm a}{\sin\alpha'}, \\ \Gamma &= A\cot\alpha.\cos\Pi - d, & \gamma &= a\cot\alpha'.\cos\varpi + d, \\ \Delta &= A\cot\alpha.\sin\Pi, & \delta &= a\cot\alpha'.\sin\varpi. \end{aligned}$$

L'équation de l'axe radical deviendra donc

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2(A\cot\alpha\cos\Pi - a\cot\alpha'.\cos\varpi - 2d)x \\ & + 2(A\cot\alpha.\sin\Pi - a\cot\alpha'\sin\varpi)y + (A^2 - a^2) \\ & + 2d(A\cot\alpha\cos\Pi + a\cot\alpha'.\cos\varpi) = 0; \end{aligned} \right.$$

si les mouvements s'exécutent dans le même sens, on a $\alpha' = \alpha$, et l'équation devient

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2[\cot\alpha(A\cos\varpi - a\cos\varpi) - 2d]x \\ & + 2\cot\alpha(A\sin\Pi - a\sin\varpi)y + (A^2 - a^2) \\ & + 2d\cot\alpha(A\cos\Pi + a\cos\varpi] = F(x, y, \alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation est de la forme

$$P\cot\alpha + Q = 0;$$

P et Q sont des fonctions linéaires de x et y. On satisfait à cette équation en posant $P = 0$, $Q = 0$; donc l'enveloppe est un point.

Si les mouvements ont lieu dans des sens opposés, alors $\alpha' = 2\pi - \alpha$, et l'on parvient au même résultat.

On pourrait discuter les divers cas auxquels donneraient lieu les diverses hypothèses que l'on pourrait faire sur les valeurs relatives des constantes A, a, Π, ϖ, d; c'est un exercice qui n'offre pas de difficulté.
