

LEBESGUE

**Démonstration d'une formule d'Euler,  
sur les diviseurs d'un nombre**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 12  
(1853), p. 232-235

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1853\\_1\\_12\\_232\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12_232_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE D'EULER, SUR LES DIVISEURS D'UN NOMBRE ;

PAR M. LEBESGUE.

### 1. Posons

$$\begin{aligned} & [(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)\dots]^m \\ & = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots; \end{aligned}$$

on reconnaît de suite que pour  $m$  entier positif,  $A_i$  est toujours entier, et comme

$$(1-x^n)^{-1} = 1 + x^n + x^{2n} + \dots,$$

il en sera de même pour le cas de  $m$  entier négatif.

2. Prenons les logarithmes des deux membres, puis les dérivées, ensuite multiplions par  $x$ , divisons par  $m$  et changeons les signes; il viendra

$$\begin{aligned} & \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} \dots + \frac{nx^n}{1-x^n} \dots \\ & = \frac{1}{m} (A_1 x + 2 A_2 x^2 + 3 A_3 x^3 \dots) \\ & = \frac{\dots}{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots} \end{aligned}$$

### 3. A cause de

$$\frac{nx^n}{1-x^n} = nx^n + nx^{2n} + nx^{3n} + \dots,$$

en réduisant le premier membre de l'équation de l'article 2 à la forme entière, on a

$$x f_1 + x^2 f_2 + x^3 f_3 + x^4 f_4 \dots = \frac{-\frac{1}{m}(A_1 x + 2 A_2 x^2 \dots)}{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \dots},$$

en représentant par  $f_n$  la somme des diviseurs du nombre entier  $n$ .

4. Chassant le dénominateur et passant tous les termes dans le premier membre, on trouve

$$\begin{aligned} x \left( A_0 f_1 + \frac{A_1}{m} \right) + x^2 \left( A_0 f_2 + A_1 f_1 + \frac{2 A_2}{m} \right) \\ + x^3 \left( A_0 f_3 + A_1 f_2 + A_2 f_1 + \frac{3 A_3}{m} \right) \\ + \dots + x^n \left[ A_0 f_n + A_1 f_{(n-1)} + \dots + A_{n-1} f_1 + \frac{n A_n}{m} \right] \\ + \dots = 0. \end{aligned}$$

Il faut donc poser généralement

$$\begin{aligned} A_0 f_n + A_1 f_{(n-1)} + A_2 f_{(n-2)} \\ + \dots + A_{n-1} f_1 + \frac{n A_n}{m} = 0; \end{aligned}$$

posant  $m = 1$ , on a la formule d'Euler, et il l'obtient précisément de même.

5. Euler a trouvé, par induction, les coefficients du développement de

$$; \quad (1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots,$$

par une règle qui revient à ceci :

1°. Le coefficient est nul quand l'exposant n'est pas de la forme

$$\frac{3n^2 \pm n}{2},$$

et chaque terme est de la forme  $(-1)^n x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}$  ;

2°. Il faut prendre successivement les deux signes ; on

n'a jamais

$$\frac{3n^2 - n}{2} = \frac{3\nu^2 + \nu}{2},$$

d'où résulterait

$$3(n - \nu) = 1;$$

ce qui est impossible,  $n$  et  $\nu$  étant entiers.

Ce qui rend sa formule d'une application facile, c'est que les coefficients ont pour valeurs 0, 1, -1.

6. Comme

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 3, \quad f_3 = 4, \quad f_4 = 7, \quad f_5 = 6, \text{ etc.},$$

on trouve sans difficulté, au moyen des équations suivantes ( $A_0 = 1$ ) :

$$\frac{A_1}{m} + f_1 = 0,$$

$$\frac{2A_2}{m} + A_1 f_1 + f_2 = 0,$$

$$\frac{3A_3}{m} + A_2 f_1 + A_1 f_2 + f_3 = 0,$$

$$\frac{4A_4}{m} + A_3 f_1 + A_2 f_2 + A_1 f_3 + f_4 = 0,$$

$$\frac{5A_5}{m} + A_4 f_1 + A_3 f_2 + A_2 f_3 + A_1 f_4 + f_5 = 0,$$

etc.

$$A_1 = -\frac{m}{1}, \quad A_2 = \frac{m \cdot m - 3}{1 \cdot 2}, \quad A_3 = \frac{-m(m-1)(m-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$A_4 = \frac{m(m-1)(m-3)(m-14)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

$$A_5 = \frac{-(m-3)(m-6)(m^2 - 21m + 8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5};$$

etc.

Il serait curieux de trouver la loi; il est probable que la recherche est épineuse.

7. Il est à croire que différentes formules des *Fundamenta* de Jacobi conduisent à des relations analogues entre les quantités  $f_1, f_2, f_3, \dots$  (*Voyez* tome IX, pages 73 et 410.)