NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

Démonstration d'une formule d'Euler, sur les diviseurs d'un nombre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 232-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__232_1>

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE D'EULER, SUR LES DIVISEURS D'UN NOMBRE;

PAR M. LEBESGUE.

1. Posons

$$[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\ldots]^m$$
$$= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots;$$

on reconnaît de suite que pour m entier positif, A_i est toujours entier, et comme

$$(1-x^n)^{-1} = 1 + x^n + x^{2n} + \ldots,$$

il en sera de même pour le cas de m entier négatif.

2. Prenons les logarithmes des deux membres, puis les dérivées, ensuite multiplions par x, divisons par m et changeons les signes; il viendra

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} \ldots + \frac{nx^n}{1-x^n} \ldots$$
$$= \frac{-\frac{1}{m}(A_1 x + 2A_2 x^2 + 3A_3 x^3 \ldots)}{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots}.$$

3. A cause de

$$\frac{nx^n}{1-x^n} = nx^n + nx^{2n} + nx^{3n} + \ldots,$$

en réduisant le premier membre de l'équation de l'article 2 à la forme entière, on a

$$x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4\ldots = \frac{-\frac{1}{m}(A_1 x + 2A_2 x^2\ldots)}{A_0 + A_1 x + A_2 x^2\ldots},$$

en représentant par $\int n$ la somme des diviseurs du nombre entier n.

4. Chassant le dénominateur et passant tous les termes dans le premier membre, on trouve

$$\begin{aligned} x\left(A_0\int 1 + \frac{A_1}{m}\right) &+ x^2\left(A_0\int 2 + A_1\int 1 + \frac{2A_2}{m}\right) \\ &+ x^3\left(A_0\int 3 + A_1\int 2 + A_2\int 1 + \frac{3A_3}{m}\right) \\ &+ \ldots + x^n\left[A_0\int n + A_1\int(n-1) + \ldots + A_{n-1}\int 1 + \frac{nA^n}{m}\right] \\ &+ \ldots = 0. \end{aligned}$$

Il faut donc poser généralement

$$\begin{aligned} A_0\int n + A_1\int(n-1) &+ A_2\int(n-2) \\ &+ \ldots + A_{n-1}\int 1 + \frac{nA_n}{m} = 0; \end{aligned}$$

posant $m = 1$, on a la formule d'Euler, et il l'obtient précisément de même.

5. Euler a trouvé, par induction, les coefficients du développement de

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots,$$

par une règle qui revient à ceci :

1°. Le coefficient est nul quand l'exposant n'est pas de la forme

$$\frac{3n^2 \pm n}{2},$$

et chaque terme est de la forme $(-1)^n x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}$;

2°. Il faut prendre successivement les deux signes; on n'a jamais

$$\frac{3n^2 - n}{2} = \frac{3\nu^2 + \nu}{2},$$

d'où résulterait

$$3(n - \nu) = 1;$$

ce qui est impossible, n et ν étant entiers.

Ce qui rend sa formule d'une application facile, c'est que les coefficients ont pour valeurs 0, 1, — 1.

6. Comme

$$\int 1 = 1, \quad \int 2 = 3, \quad \int 3 = 4, \quad \int 4 = 7, \quad \int 5 = 6, \text{ etc.},$$

on trouve sans difficulté, au moyen des équations suivantes ($A_0 = 1$) :

$$\frac{A_1}{m} + \int 1 = 0,$$

$$\frac{2A_1}{m} + A_1 \int 1 + \int 2 = 0,$$

$$\frac{3A_3}{m} + A_2 \int 1 + A_1 \int 2 + \int 3 = 0,$$

$$\frac{4A_4}{m} + A_3 \int 1 + A_2 \int 2 + A_1 \int 3 + \int_4 = 0,$$

$$\frac{5A_5}{m} + A_4 \int 1 + A_3 \int 2 + A_2 \int 3 + A_1 \int_4 + \int_5 = 0,$$

etc.

$$A_1 = -\frac{m}{1}, \quad A_2 = \frac{m.m-3}{1.2}, \quad A_3 = \frac{-m(m-1)(m-8)}{1.2.3};$$

$$A_4 = \frac{m(m-1)(m-3)(m-14)}{1.2.3.4};$$

$$A_5 = \frac{-(m-3)(m-6)(m^2-21m+8)}{1.2.3.4.5};$$

etc.

Il serait curieux de trouver la loi ; il est probable que la recherche est épineuse.

7. Il est à croire que différentes formules des *Fundamenta* de Jacobi conduisent à des relations analogues entre les quantités $\int 1$, $\int 2$, $\int 3$, ... (*Voyez* tome IX, pages 73 et 410.)