NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE-VERLY
JOSEPH SACCHI

Note sur les foyers (voir t. II, p. 429)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 225-226
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__225_0>

NOTE SUR LES FOYERS

(voir t. II, p. 429);

PAR MM. JOSEPH SACCHI, DE PAVIE, ET LAGUERRE-VERLY.

Si le coefficient angulaire d'une tangente menée par un point à une conique rapportée à des axes se coupant sous l'angle γ, est égal à $\cos\gamma \pm \sin\gamma . \sqrt{-1}$, ce point est un foyer.

Cette propriété analytique des foyers, généralisation de celle qui a été indiquée par Plucker, offre un moyen très-simple pour déterminer les coordonnées des foyers dans le cas le plus général.

Soient α et β les coordonnées d'un foyer de la conique rapportée à deux axes formant l'angle γ, et posons

$$\begin{aligned}
m &= B^2 - 4AC, & l &= D^2 - 4AF,\\
l' &= E^2 - 4CF, & k &= 2AE - BD,\\
k' &= 2CD - BE, & n &= DE - 2BF,\\
P &= m\beta^2 - 2k'\beta + l', & Q &= m\alpha^2 - 2k\alpha + l,\\
R &= m\alpha\beta - k'\alpha - k\beta - n;
\end{aligned}$$

l'équation de la tangente à la conique, en nommant p le coefficient angulaire, est

$$\begin{aligned}
my &= mpx - pk\\
&\quad + k' \pm \sqrt{p^2(k^2 - ml) - 2p(kk' + mn) + k'^2 - ml'},
\end{aligned}$$

qui doit être satisfaite par

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad p = \cos\gamma \pm \sin\gamma\sqrt{-1};$$

mettant ces valeurs de x, y, et résolvant l'équation par rapport à p, on a

$$p = \frac{R}{Q} \pm \sqrt{\frac{PQ - R^2}{Q^2}}\sqrt{-1},$$

donc

$$\cos\gamma = \frac{R}{Q}, \qquad \sin\gamma = \frac{\sqrt{(PQ - R^2)}}{Q};$$

ainsi

$$Q\cos\gamma - R = 0, \quad Q - P = 0,$$

équations qui déterminent les valeurs de α, β, coordonnées des foyers.

Prenant pour axes les diamètres conjugués égaux, l'équation $Q - P = 0$ représente le système des deux axes principaux.

Note. Soit $y + ex = 0$ l'équation d'une tangente passant par l'origine; on a

$$l' - 2en + le^2 = 0 \qquad \text{(t. II, p. 108).}$$

Si l'origine est un foyer,

$$l = l', \qquad n = l\cos\gamma;$$

d'où l'on tire

$$e = \cos\gamma \pm i\sin\gamma.$$