JOSEPH SACCHI

Solution de la question 268

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 222-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__222_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 268

(voir t. XI, p. 402);

PAR M. JOSEPH SACCHI, DE PAVIE.

On prend pour plan des xy celui de la section circulaire passant par le point fixe, ce point pour origine, l'axe des x passant par le centre du cercle. Soient a, b, c les coordonnées du sommet du cône, d la distance de l'origine au centre du cercle ayant r pour rayon. L'équation de la surface conique sera

$$c^2(x^2+y^2)+m^2z^2-2cz(nx+by-p^2)-2c^2dx-c^2q^2=0,$$

où

$$m^2 = (a-d)^2 + b^2 - r^2, \quad n = a - d,$$
$$q^2 = r^2 - d^2, \qquad p^2 = q^2 + ad;$$

et si, dans cette équation, au lieu de x, y, z on met respectivement les valeurs suivantes :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha \cos \beta, \quad x \sin \alpha - y \cos \alpha \cos \beta, \quad y \sin \beta,$$

on aura

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

où

$$A = c^2 + (m^2 - c^2) \sin^2 \beta - 2c \sin \beta \cos \beta \,(n \sin \alpha - b \cos \alpha),$$
$$B = -2c \sin \beta \,(n \cos \alpha + b \sin \alpha),$$
$$C = c^2,$$
$$D = 2c\,(p^2 \sin \beta - cd \sin \alpha \cos \beta),$$
$$E = -2c^2 d \cos \alpha,$$
$$F = -c^2 q^2.$$

Cette nouvelle équation représente la section du cône avec le plan passant par l'origine et formant avec le plan des xy l'angle β.

La condition que le point fixe, c'est-à-dire l'origine, soit un foyer de la courbe, est exprimée par

$$E^2 - 4CF = D^2 - 4AF, \quad DE - 2BF = 0,$$

ou

$$\operatorname{tang}^2 \beta \,(f^2 + d^2 \cos^2 \alpha) + 2 \operatorname{tang} \beta \left(h^2 \sin \alpha - q \frac{2b}{c} \cos \alpha\right)$$
$$+ d^2 \cos 2\alpha = 0,$$
$$\operatorname{tang} \beta \left(h^2 \cos \alpha + q \frac{2b}{c} \sin \alpha\right) - d^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

ou encore

$$f^2 = \frac{q^2 (c^2 - b^2) - r^2 a^2}{c^2}, \qquad h^2 = \frac{a}{c} r^2.$$

Ces dernières équations fournissent les valeurs de α et β qui déterminent la position du plan sécant.

Si le cône est droit, on a

$$b=0, \quad a=d, \quad h^2=\frac{d}{c}r^2, \quad f^2=\frac{q^2l^2-r^4}{c^2},$$

où $l=\sqrt{c^2+p^2}$ est le côté du cône; la seconde équation donne

$$\cos\alpha=0,$$

et, par conséquent, la première

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{d}{k},$$

où $k=\frac{ql+r^2}{c}$; le plan sécant devient perpendiculaire au plan xz, et $kz-dx=0$ est son équation, qui, évidemment, représente le plan tangent à la sphère,

$$(x-d)^2+y^2+(z+k)^2=k^2+d^2.$$

Si le point fixe devait être le centre de la section, les conditions seraient

$$\mathrm{D}=0, \quad \mathrm{E}=0,$$

ou bien

$$\cos\alpha=0, \quad p^2\sin\beta-cd\sin\alpha\cos\beta=0;$$

on conclut de ces équations

$$\alpha=90^\circ, \quad \operatorname{tang}\beta=\frac{cd}{p^2},$$

et $p^2z-cdx=0$ pour l'équation du plan sécant.

Note. Faisant $c=\infty$, le cône devient un cylindre, et l'on trouve

$$\alpha=90^\circ, \qquad \operatorname{tang}^2\beta=\frac{d^2}{r^2-d^2}.$$