Courbes planes ; génération

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 220-222
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__220_1>

COURBES PLANES; GÉNÉRATION.

1. *Lemme.* Une courbe plane du degré n est, généralement parlant, déterminée par $\frac{n(n+3)}{2}$ points.

2. THÉORÈME. *a_p désignant un point fixe dans un plan; A_p une droite fixe dans le même plan; O un point mobile; I_p l'intersection de la droite A_p avec la droite*

menée de O au point a_p; donnons à l'indice p successivement les valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$; *nous aurons* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *points fixes; autant de droites fixes, autant de points d'intersection* I_p. *Si ces derniers points sont assujettis à se trouver sur une ligne de degré n, le point mobile O décrit une ligne de degré*

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

Démonstration. Soient $\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}$ les coordonnées du point O; $\frac{x_p}{z_p}, \frac{y_p}{z_p}$ les coordonnées du point a_p, et

$$A_p x + B_p y + C_p z = 0$$

l'équation de la droite A_p. L'équation de la droite qui joint le point O au point a_p est

$$x[y_1 z_p] + y[x_1 y_p] + z[y_1 x_p] = 0;$$

le crochet indique un déterminant binaire. Les trois coordonnées des points d'intersection I_p sont donc des fonctions linéaires de x_1, y_1, z_1.

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

une équation générale homogène de degré n et renfermant $\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients indéterminés. Substituant, dans cette équation, à la place de x, y, z, les coordonnées correspondantes des points I_p, on obtient $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations du premier degré entre les

$\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients, et, dans chaque terme, les x_1, y_1, z_1 montent au degré n; on a donc une équation de plus que d'inconnues; éliminant les coefficients en égalant le déterminant à zéro, on obtient une équation en x_1, y_1, z_1 de degré $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$.

3. On établit de la même manière le théorème suivant :

Étant donnés $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$ *points dans l'espace et autant de plans, un faisceau de droites qui passe par ces points fixes, et par le point mobile* O, *coupe les plans en* $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$ *points; si ces points d'intersection sont assujettis à être sur une surface de degré* n, *le point mobile* O *décrit une surface de degré* $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$.