DIEU

Concours d'agrégation aux lycées, année 1843

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 21-24
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__21_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1843 (**);

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Trouver l'équation des surfaces, telles que, si, d'un point donné A *on abaisse une perpendiculaire sur un*

(*) J.-Alph. Borelli : *De Motu animalium.*

(**) Nous ne donnerons, de cette année, que la composition d'analyse, attendu que celle de mécanique n'était autre chose que l'analyse du pendule conique.

plan tangent, le rectangle de cette perpendiculaire et de la portion de la normale comprise entre le point de contact M *et un plan* P *mené par le point* A, *soit équivalent au carré de* AM.

Si l'on prend A pour origine des coordonnées rectangulaires, et le plan P pour celui des xy; x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque M d'une des surfaces demandées,

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \pm\frac{z-px-qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad \text{et} \quad \pm z\sqrt{1+p^2+q^2}$$

représentent respectivement AM, la distance de A au plan tangent en M, et la portion de la normale en M, qui est définie dans l'énoncé; mais il faut prendre, devant les deux dernières expressions, le signe pour lequel elles sont positives.

Les surfaces cherchées sont donc celles qui satisfont, soit à l'équation

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = z(z-px-qy), \\ \text{ou} \\ zx\dfrac{dz}{dx}+yz\dfrac{dz}{dy}+x^2+y^2=0, \end{cases}$$

soit à l'équation

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = -z(z-px-qy), \\ \text{ou} \\ zx\dfrac{dz}{dx}+yz\dfrac{dz}{dy}-x^2-y^2-2z^2=0. \end{cases}$$

Par la méthode de M. Jacobi, l'intégrale de l'équation (1) se déduit de celles des équations simultanées

$$\frac{dx}{zx}=\frac{dy}{xy}=-\frac{dz}{x^2+y^2},$$

qui sont

$$\frac{y}{x} = c_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2;$$

et cette intégrale est

(3) $$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

On obtient de même l'équation

(4) $$x^4 = (x^2 + y^2 + z^2) . \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

dans laquelle ψ désigne encore une fonction arbitraire, pour l'intégrale de l'équation (2).

Les surfaces comprises dans les équations (3) et (4) présentent deux caractères communs :

1°. *Elles ont, pour centre, le point* A; car ces équations ne changent pas quand on remplace x, y, z par $-x$, $-y$, $-z$.

2°. *Le plan* P *ou* xy *est un plan diamétral principal;* car ces équations donnent deux valeurs de z égales, et de signes contraires pour chaque système de valeurs de x, y.

Si l'on coupe les surfaces comprises dans l'équation (3) *par des plans conduits suivant* Az, *on a toujours un cercle dont le centre est* A. En effet, pour avoir l'équation d'une de ces sections par rapport à Az et à la trace Ax' de son plan sur xy, il suffit de faire dans l'équation

$$x = x' \cos\theta, \quad y = x' \sin\theta$$

(θ désignant l'angle x'Ax compté de Ax vers Ay); ce qui donne

$$x'^2 + z^2 = \varphi(\operatorname{tang}\theta),$$

équation qui représente une circonférence, si

$$\varphi(\operatorname{tang}\theta) > 0;$$

l'origine A seulement, si

$$\varphi(\operatorname{tang}\theta) = 0,$$

et qui ne représente rien, si

$$\varphi(\operatorname{tang}\theta) < 0.$$

Enfin, on voit facilement que l'origine est un point isolé des surfaces comprises dans l'équation (4).