NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Question 238 (Michael Roberts)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 215-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__215_0>

QUESTION 238 (MICHAEL ROBERTS)

(voir t. X, p. 357);

PAR M. H. FAURE.

THÉORÈME. *Lorsqu'une suite d'ellipsoïdes sont inscrits dans un cône de révolution qu'ils touchent suivant la même ligne de contact, on a entre leurs demi-axes la relation*

$$\frac{b^3}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} = \textit{constante}.$$

Démonstration. Si l'on circonscrit à un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

un cône de révolution, le sommet S de ce cône se trouve sur l'hyperbole focale de la surface. Si l'on suppose $a>b>c$, cette hyperbole est dans le plan principal qui contient l'axe majeur et l'axe mineur de l'ellipsoïde; de sorte que l'équation de cette focale est

$$(1) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2-b^2}-\frac{\gamma^2}{b^2-c^2}=1,$$

α, γ étant les coordonnées du sommet S de l'un des cônes circonscrits. L'ellipse de contact se projette sur le plan des XZ en une droite qui a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=1;$$

les axes de cette ellipse sont représentés par la ligne AB, polaire du sommet S, dans le plan des XZ, et par la perpendiculaire élevée sur cette ligne au point I, milieu de cette ligne AB. Appelant A et B ces deux demi-axes, on trouve, en considérant AB comme la corde de contact des tangentes issues du point (α, γ) à l'ellipse ombilicale,

$$A^2 = \frac{(a^4\gamma^2 + c^4\alpha^2)(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2 - a^2c^2)}{(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2)^2}.$$

Pour obtenir le petit axe B, je coupe l'ellipsoïde par un plan passant par son centre C et par le sommet S perpendiculairement au plan des ZX; l'ellipse que j'obtiens ainsi a pour demi-axes b et CR; R est l'intersection de la droite CS avec l'ellipse ombilicale; de sorte que l'axe B est l'ordonnée de cette ellipse qui correspond à l'abscisse CI; or on trouve

$$\overline{CR}^2 = \frac{a^2c^2(\alpha^2 + \gamma^2)}{a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2}, \quad \overline{CI}^2 = \frac{a^4c^4(\alpha + \gamma)}{(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2)};$$

donc

$$B^2 = \frac{b^2(a\gamma^2 + c\alpha^2 - a^2c^2)}{a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2}.$$

On peut, au moyen de la relation (1), éliminer α ou γ dans les valeurs de A et B; on trouve ainsi

$$a^4\gamma^2 + c^4\alpha^2 = \gamma^2(a^2b^2 + b\,c - a^2c^2)\left(\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c}\right) + c^4(a - b^2),$$

$$a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2 = b^2\gamma\left(\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}\right) + c^2(a^2 - b),$$

$$a\,\gamma + c^2\alpha^2 - a^2c = b\,\gamma\left(\frac{a^2 - c^2}{b - c}\right) - b^2c^2.$$

on déduit de là, sans difficulté,

$$\frac{B^2}{\sqrt{A^2 - B^2}} = \frac{b^3}{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}.$$

La question 238, proposée par M. Michael Roberts, se déduit immédiatement de là; ainsi, lorsque plusieurs ellipsoïdes sont inscrits dans un cône de révolution suivant la même courbe de contact, leurs demi-axes a, b, c sont liés entre eux par la relation précédente. Ce savant géomètre a été conduit à ce théorème, au moyen de considérations différentes (*); il a trouvé, en effet, qu'en représentant par φ l'angle sous lequel une ligne géodésique issue d'un ombilic coupe une ellipse de contact d'un cône de révolution circonscrit, et par y la distance de ce point d'intersection au plan des ombilics, le produit y tang φ est constant et égal aussi à

$$\frac{b^3}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}.$$

Il est facile de passer de l'un des théorèmes à l'autre, en se rappelant que :

1°. Le rayon vecteur tiré d'un foyer d'une conique coupe la courbe sous un angle tel, que le produit de sa tangente trigonométrique et de la distance du point d'intersection à l'axe le plus grand de la courbe, est constant et égal au carré du petit axe divisé par l'excentricité; 2°. Si l'on joint un point quelconque de l'ellipse de contact avec un foyer de la section, avec le sommet du cône, et, enfin, à l'ombilic situé sur la branche de l'hyperbole focale à laquelle appartient le sommet du cône, on obtient trois lignes qui coupent l'ellipse sous le même angle.

Nota. Un cône de révolution étant circonscrit à un ellipsoïde, toute sphère inscrite dans le cône coupera l'ellipsoïde suivant une de ses sections circulaires; et si elle devient tangente, le point de contact sera un ombilic de la surface. On peut donc considérer l'hyperbole focale

(*) Journal de M. Liouville, tome XV, page 283.

d'un ellipsoïde comme étant le lieu des sommets des cônes circonscrits à un ellipsoïde et à une sphère de rayon variable, tangente en un ombilic.

Si la sphère coupait l'ellipsoïde suivant une même section circulaire, le lieu géométrique serait évidemment le même. Ces deux théorèmes fournissent la solution de la question proposée au concours de 1844 (*Nouvelles Annales*, tome III, page 489), et de celle de M. Chasles, démontrée dans le tome X, page 408, et dernièrement par M. Breton (de Champ).

La considération du cône de révolution prouve encore que si l'on considère un point M d'une ellipse fixe et toutes les ellipses possibles, tangentes à la première au point M par leur sommet, le lieu des intersections des tangentes communes sera une hyperbole biconfocale à la proposée.

Considérons aussi une ellipse et une hyperbole concentriques ayant leurs axes dans la même direction; menons une tangente à l'hyperbole, et par les points où cette ligne rencontre l'ellipse, deux tangentes à celle-ci, leur point d'intersection décrira une hyperbole biconfocale à l'ellipse, et les axes de celle-ci seront moyens proportionnels entre ceux des hyperboles (*).