

DIEU

**Note sur les théorèmes qui servent de base
à la rectification des courbes**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 12
(1853), p. 210-214

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__210_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LES THÉORÈMES QUI SERVENT DE BASE A LA
RECTIFICATION DES COURBES;**

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

Courbes planes.

On peut appliquer à une courbe plane quelconque la démonstration de ce théorème, qu'on ne donne ordinairement que pour un arc de cercle :

La limite du rapport d'un arc indéfiniment décroissant à sa corde est égale à l'unité.

En effet, soient

AB un arc de courbe dont l'extrémité A reste fixe et dont l'extrémité B varie sur cette courbe;
 s , c et t les longueurs de cet arc, de sa corde et de la brisée ACB formée par les tangentes en A et B;
 α le plus grand des deux angles adjacents au côté AB dans le triangle ACB qui renferme l'arc AB supposé assez petit.

On a évidemment

$$c = AC \cdot \cos A + BC \cdot \cos B,$$

et, par conséquent,

$$c > t \cos \alpha.$$

(211)

Mais on peut admettre que $t > s$; ainsi l'inégalité qui précède donne, à *fortiori*,

$$(1) \quad c > s \cos \alpha,$$

d'où

$$\frac{s}{c} < \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Donc, comme $\frac{s}{c}$ ne peut tomber au-dessous de 1, et comme $\frac{1}{\cos \alpha}$ tend vers 1 (limite inférieure), lorsque α tend vers 0, on a

$$\lim \frac{s}{c} = 1,$$

quand s tend vers zéro.

C. Q. F. D.

On démontre de même que :

La limite du rapport de la différence entre un arc et sa corde au cube de l'arc est inférieure à la moitié du carré de la courbure.

Premièrement, on déduit à *fortiori* de l'inégalité (1) que

$$c > s \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right),$$

car $\cos \alpha > 1 - \frac{\alpha^2}{2}$; et, par conséquent, on a

$$(2) \quad \frac{s-c}{s^3} < \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{s} \right)^2.$$

D'autre part, les normales en A et B, à la courbe que l'on considère, se coupent en un point D de la circonférence circonscrite au triangle ACB, et en désignant par σ l'arc ACB de cette circonférence, dont le diamètre est CD, on a

$$\alpha < \frac{\sigma}{CD},$$

d'où

$$(3) \quad \left(\frac{\alpha}{s}\right)^2 < \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 \cdot \frac{1}{\text{CD}^2}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les inégalités (2) et (3), il vient

$$\frac{s-c}{s^2} < \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 \frac{1}{\text{CD}}.$$

Or, $\frac{\sigma}{s} = \frac{\sigma}{c} : \frac{s}{c}$ tend vers l'unité, et CD tend vers le rayon de courbure R correspondant au point A, lorsque s tend vers zéro; donc on a

$$\lim \frac{s-c}{s^2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2},$$

c. q. f. p., car la courbure en A est exprimée par $\frac{1}{R}$.

D'après cela :

La différence entre un arc infiniment petit de courbe plane et sa corde est infiniment petite du troisième ordre au moins par rapport à l'arc.

Aux points d'inflexion où R est infini, $s-c$ est infiniment petite du cinquième ordre au moins, si l'on regarde $\frac{1}{R}$ comme un infiniment petit du même ordre que s; et notre démonstration tombe en défaut lorsque $R = 0$.

Courbes à double courbure.

Ce qui précède s'étend à des courbes à double courbure. En effet, soient

AB un arc de courbe quelconque;
s et c la longueur de cet arc et celle de sa corde;

AC la projection de AB sur un plan P qui passe par le point A, différant du plan normal en ce point et ne coupant pas la courbe entre A et B;

σ et γ les longueurs de AC et de sa corde;

AT et AS la tangente à AB en A, et la projection de cette tangente sur le plan P.

Supposons que le cylindre projetant se développe sur le plan TAS en même temps que AC se rectifie; et soient encore

AC' la partie de AS sur laquelle s'étend AC;

AB' ce que devient l'arc AB, et il faut admettre que la longueur de cet arc ne change pas dans le développement du cylindre;

c' la longueur de la corde de AB';

enfin α et α' les angles BAC et B'AC'.

Les triangles rectangles ACB et AC'B' donnent

$$\gamma = c \cdot \cos \alpha, \quad \sigma = c' \cdot \cos \alpha';$$

et, par conséquent, on a

$$(1) \quad \frac{s}{c} = \frac{s}{c'} \cdot \frac{\sigma}{\gamma} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}.$$

Or, lorsque s tend vers zéro, $\frac{s}{c'}$ et $\frac{\sigma}{\gamma}$ tendent vers l'unité

(courbes planes), et $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$ tend aussi vers 1, car α et α' se rapprochent tous deux indéfiniment de l'angle TAS; donc on a

$$\lim \frac{s}{c} = 1,$$

comme pour une courbe plane.

Secondement, l'équation (1) donne

$$\frac{s - c}{s} = \frac{s \sigma \cdot \cos \alpha - c' \gamma \cdot \cos \alpha'}{s \sigma \cdot \cos \alpha},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{s - c}{s} = \frac{s - c'}{s} + \frac{\sigma - \gamma \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}}{\sigma - \gamma} \cdot \frac{c'}{s} \cdot \frac{\sigma - \gamma}{\sigma};$$

et, en divisant par s^2 , il vient

$$\frac{s - c}{s^3} = \frac{s - c'}{s^3} + \frac{\sigma - \gamma \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}}{\sigma - \gamma} \cdot \frac{c'}{s} \cdot \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 \cdot \frac{\sigma - \gamma}{\sigma^3}.$$

s tendant vers zéro, $\frac{s - c'}{s^3}$ et $\frac{\sigma - \gamma}{\sigma^3}$ tendent vers de certaines limites qui sont finies en général et inférieures respectivement à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R'^2}$ et $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho^2}$, si l'on représente par R' et ρ les rayons de courbure de la transformée plane et de la projection de la courbe que l'on considère (courbes planes); en même temps, $\frac{\sigma - \gamma \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}}{\sigma - \gamma}$, $\frac{c'}{s}$ et $\frac{\sigma}{s} = \frac{c'}{s} \cos \alpha'$ tendent vers l'unité; donc

$$\lim \frac{s - c}{s^3} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'^2} + \frac{1}{\rho^2} \right),$$

et, par conséquent :

La différence entre un arc infiniment petit de courbe quelconque et sa corde est infiniment petite du troisième ordre au moins, en général.