NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LIONNET

# Note sur les approximations numériques

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 12 (1853), p. 177-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__177_0>

# NOTE SUR LES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES (*);

PAR M. E. LIONNET,
Professeur au lycée Louis-le-Grand.

## PRINCIPES.

I. *L'erreur absolue* d'une quantité, remplacée par une valeur approchée par excès ou par défaut, est la différence entre cette quantité et sa valeur approchée. Ainsi l'erreur absolue du nombre 957, remplacé par 960 ou par 954, est égale à 3 unités.

II. *L'erreur relative* d'une quantité, remplacée par une valeur approchée par excès ou par défaut, est le rapport de l'erreur absolue de cette quantité à cette même quantité. Ainsi l'erreur relative du nombre 957, remplacé par 960 ou par 954, est égale à $\frac{3}{957}$.

III. *L'erreur relative d'un nombre entier ou décimal sur la droite duquel on supprime un ou plusieurs chiffres, qu'on remplace par des zéros s'ils sont à gauche de la virgule, est moindre que l'unité décimale dont l'ordre est marqué par le nombre moins un des chiffres conservés à partir du premier chiffre significatif.*

Ainsi l'erreur relative du nombre 0,0314159, qu'on remplace par 0,0314, est moindre que 0,01. Car l'erreur absolue du nombre proposé est moindre qu'un dix-millième, tandis que le nombre proposé lui-même excède

(*) Cette théorie des approximations répond aux nos 16 et 17 du programme d'arithmétique des lycées (sciences, classe de troisième). Elle suffit aux candidats aux Écoles du Gouvernement.

300 dix-millièmes, et, à plus forte raison, 100 dix-millièmes; donc l'erreur relative de ce nombre (II) est moindre que 1 dix-millième divisé par 300 dix-millièmes ou que $\frac{1}{300}$, et, à plus forte raison, moindre que 0,01. On voit de même que l'erreur relative du nombre 314,159, remplacé par 314,1, est moindre que 0,001, et que l'erreur relative du nombre 314159, remplacé par 310000, est moindre que 0,1.

*Corollaire.* Il en résulte que, *pour obtenir une valeur approchée par défaut d'un nombre entier ou décimal avec une erreur relative moindre qu'une unité décimale d'un ordre énoncé, il suffit de conserver sur la gauche de ce nombre, à partir du premier chiffre significatif, un nombre de chiffres égal au nombre plus un qui marque l'ordre énoncé.*

*Remarque* I. Lorsque le premier chiffre significatif à gauche du nombre proposé est autre que 1, *l'erreur relative de ce nombre est moindre qu'une demi-unité décimale de l'ordre marqué par le nombre moins un des chiffres conservés.* Ainsi l'erreur relative du nombre 0,0314159, remplacé par 0,0314, étant moindre que $\frac{1}{300}$, est, à plus forte raison, moindre qu'un demi-centième. Il en est encore de même lorsque le premier chiffre significatif, à gauche du nombre proposé, étant 1, le premier des chiffres négligés, exprime moins de 5 unités ou lorsque ce chiffre est un 5 non suivi d'autres chiffres significatifs. Ainsi l'erreur relative du nombre 14,142..., remplacé par 14,14, est moindre qu'un demi-millième.

Car l'erreur absolue du nombre proposé étant moindre qu'un demi-centième et ce nombre excédant mille centièmes, son erreur relative est moindre qu'un demi-centième divisé par mille centièmes ou qu'un demi-millième.

Donc, dans la plupart des cas (17 environ sur 18), *pour obtenir une valeur approchée d'un nombre entier ou décimal avec une erreur relative moindre qu'une demi-unité décimale d'un ordre énoncé, il suffit de conserver, à partir du premier chiffre significatif à gauche, autant de chiffres plus un qu'il est marqué par l'ordre de l'unité décimale énoncée.*

*Remarque* II. Le même principe (III) et ses conséquences sont applicables à un nombre entier ou décimal sur la droite duquel on supprime un ou plusieurs chiffres en augmentant d'une unité le dernier chiffre conservé. Ainsi, pour obtenir une valeur du nombre 14,1421, approchée par excès avec une erreur relative moindre que 0,001, on le remplacera par 14,15; et pour obtenir une valeur du nombre 27,1828..., approchée par excès avec une erreur relative moindre qu'un demi-millième, on le remplacera par 27,19.

IV. *L'erreur absolue d'un produit* $9 \times 5$ *de deux facteurs, dont on modifie un seul facteur* 9, *en le remplaçant par une valeur* $9+2$ *ou* $9-2$, *approchée par excès ou par défaut, est égale au facteur* 5 *non modifié, multiplié par l'erreur absolue* 2 *de l'autre facteur; et l'erreur relative du même produit est égale à celle du facteur modifié.*

1°. En multipliant le nouveau multiplicande $9+2$ ou $9-2$ par le même multiplicateur 5, on a $9 \times 5 + 2 \times 5$ ou $9 \times 5 - 2 \times 5$; donc, dans l'un et l'autre cas, l'erreur absolue du produit $9 \times 5$ est $2 \times 5$ ou $5 \times 2$ (I).

2°. Pour obtenir l'erreur relative du produit $9 \times 5$, on divise son erreur absolue $5 \times 2$ par $9 \times 5$ (II), ce qui donne $\frac{2}{9}$ ou l'erreur relative du facteur 9 modifié.

V. *L'erreur absolue d'un produit* $9 \times 5$ *de deux facteurs, qu'on remplace par des valeurs* $9-2$ *et* $5-3$

*approchées par défaut, est moindre que la somme des produits qu'on obtient en multipliant chacun des facteurs par l'erreur absolue de l'autre facteur; et l'erreur relative du même produit est moindre que la somme des erreurs relatives des deux facteurs.*

1°. En supposant d'abord qu'on modifie le seul facteur 9 en le remplaçant par $9 - 2$, ce qui revient à remplacer $9 \times 5$ par $(9 - 2) \times 5$, l'erreur absolue du produit $9 \times 5$ sera $5 \times 2$ (IV); ensuite, si l'on remplace, dans le produit $(9 - 2) \times 5$, le facteur 5 par $5 - 3$, on obtiendra le produit $(9 - 2) \times (5 - 3)$ en commettant une nouvelle erreur absolue égale à $(9 - 2) \times 3$ (IV), et, par conséquent, moindre que $9 \times 3$; donc l'erreur absolue totale du produit $9 \times 5$ sera moindre que $9 \times 3 + 5 \times 2$.

2°. L'erreur absolue du produit $9 \times 5$ étant moindre que $9 \times 3 + 5 \times 2$, son erreur relative (II) sera moindre que

$$\frac{9 \times 3 + 5 \times 2}{9 \times 5} = \frac{9 \times 3}{9 \times 5} + \frac{5 \times 2}{9 \times 5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{9},$$

c'est-à-dire moindre que la somme des erreurs relatives des facteurs 5 et 9.

Corollaire I. *L'erreur relative d'un produit de plusieurs facteurs, qu'on remplace par des valeurs approchées par défaut, est moindre que la somme des erreurs relatives de tous les facteurs.*

Corollaire II. *L'erreur relative de la puissance d'un nombre, qu'on remplace par une valeur approchée par défaut, est moindre que l'erreur relative de ce nombre multipliée par le degré de la puissance.*

VI. *L'erreur absolue d'un quotient $\frac{9}{5}$, dans lequel on remplace le dividende 9 par une valeur $9 + 2$ ou*

$9 - 2$ *approchée par excès ou par défaut, est égale à l'erreur absolue du dividende divisée par le diviseur; et l'erreur relative du même quotient est égale à celle du dividende.*

1°. En divisant le nouveau dividende $9+2$ ou $9-2$ par le même diviseur 5, on a le nouveau quotient

$$\frac{9}{5}+\frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{9}{5}-\frac{2}{5};$$

donc, dans l'un et dans l'autre cas, l'erreur absolue du quotient $\frac{9}{5}$ est égale à $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire à l'erreur absolue du dividende divisée par le diviseur.

2°. Pour obtenir l'erreur relative du quotient $\frac{9}{5}$, on divise son erreur absolue $\frac{2}{5}$ par $\frac{9}{5}$, ce qui donne $\frac{2}{9}$ ou l'erreur relative du dividende.

VII. *L'erreur absolue d'un quotient* $\frac{9}{5}$, *dans lequel on remplace le diviseur* 5 *par une valeur* $5+3$ *ou* $5-3$ *approchée par excès ou par défaut, est égale à ce quotient multiplié par le rapport de l'erreur absolue* 3 *du diviseur à sa valeur approchée* $5+3$ *ou* $5-3$; *et l'erreur relative du même quotient est égale à l'erreur absolue du diviseur divisé par sa valeur approchée.*

1°. En supposant qu'on remplace le diviseur 5 par $5+3$, l'erreur absolue du quotient $\frac{9}{5}$ sera

$$\frac{9}{5}-\frac{9}{5+3}=9\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5+3}\right):$$

réduisant les quotients entre parenthèses au même diviseur $5\times(5+3)$, et prenant la différence des deux quotients qui en résultent, on trouve que l'erreur absolue du quotient est

$$\frac{9 \times 3}{5 \times (5+3)} \quad \text{ou} \quad \frac{9}{5} \times \frac{3}{5+3}.$$

En supposant qu'on remplace 5 par $5-3$ ou par 2, on trouve, de la même manière, que l'erreur absolue du quotient

$$\frac{9}{2} - \frac{9}{2+3} = \frac{9 \times 3}{2 \times (2+3)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{9}{5} \times \frac{3}{5-3}.$$

2°. L'erreur absolue du quotient $\frac{9}{5}$ étant

$$\frac{9}{5} \times \frac{3}{5+3} \quad \text{ou} \quad \frac{9}{5} \times \frac{3}{5-3},$$

si on la divise par $\frac{9}{5}$, on aura, pour l'erreur relative de ce quotient,

$$\frac{3}{5+3} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{5-3}.$$

Corollaire I. *Selon que le nombre qui remplace le diviseur est une valeur approchée par excès ou par défaut, l'erreur relative du quotient est plus petite ou plus grande que celle du diviseur.*

Corollaire II. *Lorsque le diviseur 7,8 étant un nombre décimal dont la partie entière 7 excède* m *fois le quotient, on remplace ce diviseur par sa partie entière, l'erreur absolue du quotient est moindre que* $\frac{1}{m}$.

Car, en supposant que 9 soit le dividende, l'erreur absolue du quotient $\frac{9}{7,8}$ sera (1°)

$$\frac{9}{7,8} \times \frac{0,8}{7} < \frac{9}{7,8} \times \frac{1}{7}:$$

mais, par hypothèse, 7 excède $m$ fois le quotient $\frac{9}{7{,}8}$; donc, le cinquième du quotient est un nombre moindre que $\frac{1}{m}$, et il en est de même, à plus forte raison, du produit

$$\frac{9}{7{,}8} \times \frac{0{,}8}{7}.$$

VIII. *L'erreur relative d'un quotient* $\frac{9}{5}$, *dans lequel on remplace le dividende par une valeur* $9 - 2$ *approchée par défaut, et le diviseur par une valeur* $5 + 3$ *approchée par excès, est moindre que la somme des erreurs relatives du dividende et du diviseur.*

Le quotient proposé et celui qui le remplace étant égaux respectivement aux produits

$$9 \times \frac{1}{5}, \quad (9 - 2) \times \frac{1}{5 + 3},$$

on voit que chacun des facteurs 9 et $\frac{1}{5}$ du premier produit a été remplacé par une valeur approchée par défaut; donc l'erreur relative de ce produit ou du quotient proposé est moindre que la somme des erreurs relatives de ses deux facteurs (V); or l'erreur relative du facteur 9 remplacé par $9 - 2$ est $\frac{2}{9}$; l'erreur relative du facteur $\frac{1}{5}$ remplacé par $\frac{1}{5+3}$ est moindre que $\frac{3}{5}$ (VII, corollaire I); donc l'erreur relative du quotient proposé est moindre que

$$\frac{2}{9} + \frac{3}{5}.$$

## MULTIPLICATION ABRÉGÉE.

IX. *Pour trouver, à moins d'une unité entière ou décimale d'un ordre énoncé, le produit de deux nom-*

*bres entiers ou décimaux, on écrit, dans un ordre inverse, les chiffres du multiplicateur sous le multiplicande, de manière que le chiffre des unités simples corresponde à celui du multiplicande qui exprime des unités cent fois plus petites que celles de l'ordre énoncé; on multiplie le multiplicande successivement par chacun des chiffres du multiplicateur, à partir de la droite, en faisant abstraction des chiffres du multiplicande placés à la droite de celui qui sert de multiplicateur : on écrit chacun de ces produits partiels au-dessous du multiplicande, de manière que leurs premiers chiffres à droite soient dans la même colonne verticale; enfin, on additionne tous ces produits, considérés comme exprimant des unités cent fois plus petites que celles de l'ordre énoncé, et l'on supprime deux chiffres sur la droite du résultat, en augmentant d'une unité le dernier chiffre conservé.*

En appliquant cette règle au produit

$$3,141592\ldots \times 27,1828\ldots,$$

dont on demande une valeur approchée à moins d'un dixième, on trouve 85,4 pour le produit demandé.

$$\begin{array}{r}
3,141592\ldots\ldots \\
\ldots\ldots 8281,72 \\
\hline
62,830 \\
21,987 \\
314 \\
248 \\
6 \\
\hline
85,385 \\
85,4
\end{array}$$

*Démonstration.* La partie du multiplicande écrite à la droite du premier chiffre 2 employé comme multiplicateur, étant moindre qu'un dix-millième, en omettant de la multiplier par 20, on a diminué le produit proposé d'un nombre moindre que 2 millièmes; la partie du multiplicande écrite à droite du deuxième chiffre 7 employé comme multiplicateur, étant moindre qu'un millième, en omettant de la multiplier par 7, on a diminué le produit d'un nombre moindre que 7 millièmes. Raisonnant de la même manière à l'égard des chiffres suivants employés comme multiplicateurs, on voit qu'on a successivement diminué le produit de trois nombres formant une somme moindre que $(1 + 8 + 2)$ millièmes. Enfin, le multiplicande étant moindre que 10, et la partie du multiplicateur écrite à sa gauche étant moindre que $(8+1)$ dix-millièmes, en omettant de multiplier le multiplicande par cette partie du multiplicateur, on a diminué le produit d'un nombre moindre que $(8 + 1)$ millièmes; donc, en définitive, si l'on remplaçait le produit proposé par le produit 85,385 obtenu précédemment, on aurait diminué le premier produit d'un nombre moindre que $(2+7+1+8+2+8+1)$ millièmes, ou, plus généralement, d'un nombre moindre que 101 millièmes, en supposant que $2+7+1+8+2+8$ n'excède pas le nombre 100. De plus, si après avoir supprimé les deux premiers chiffres à droite du nombre 85,385, on le remplaçait par le nombre 85,3, on diminuerait encore le produit proposé de 85 millièmes, c'est-à-dire d'un nombre qui ne peut excéder 99 millièmes; donc, la diminution totale du produit proposé serait moindre que $(101+99)$ millièmes ou que 2 dixièmes; donc, enfin, si l'on ajoute 1 dixième à 85,3, le résultat 85,4 et le produit proposé différeront entre eux d'une quantité égale à la différence entre 1 dixième et un nombre moindre que 2 dixièmes, c'est-à-dire d'un nombre moindre qu'un dixième.

*Remarque*. La règle précédente, connue sous le nom de *règle d'Onghtred*, suppose le cas très-général où la somme des chiffres employés au multiplicateur, augmentée du premier des chiffres négligés, n'excède pas 100. Dans le cas où cette somme serait comprise entre 100 et 1001, on verrait facilement qu'il suffirait de modifier la règle d'Onghtred, en écrivant le chiffre des unités simples du multiplicateur sous celui qui exprime des unités mille fois plus petites que celles de l'ordre énoncé, puis en supprimant trois chiffres au lieu de deux, sur la droite du produit obtenu. Mais si cette même somme n'excédait pas 10, il suffirait de placer le chiffre des unités simples du multiplicateur sous celui qui exprimerait des unités dix fois moindres que celles de l'ordre énoncé, et alors on supprimerait un seul chiffre à la droite du produit obtenu. Enfin, il est utile d'observer qu'en intervertissant l'ordre des deux facteurs proposés, on obtiendrait la même valeur approchée, d'où il résulte qu'on pourra substituer à la limite précédente la somme des chiffres du multiplicande, jusqu'à celui qui suit immédiatement le premier chiffre à droite du multiplicateur renversé.

## DIVISION ABRÉGÉE.

X. *Pour trouver, à moins d'une unité entière ou décimale d'un ordre énoncé, le quotient de la division de deux nombres entiers ou décimaux, on commence par déterminer l'ordre des plus grandes unités, et, par suite, le nombre* n *des chiffres du quotient demandé. Faisant ensuite abstraction de la virgule dans les nombres proposés, on prend sur la gauche du diviseur le plus petit nombre au moins égal à* n; *ce nombre, à la droite duquel on prend encore* n *chiffres du diviseur, forme le premier diviseur partiel; pour former le premier dividende partiel, on prend sur la gauche du dividende le plus petit nombre qui contienne le diviseur; divisant le premier dividende par le premier diviseur, on obtient le premier chiffre à gauche du quotient; on prend pour second dividende partiel le reste de la division précédente, et, pour second diviseur, le diviseur précédent privé de son dernier chiffre; et ainsi de suite jus-*

*qu'à ce qu'on ait obtenu* n *chiffres au quotient; alors on fait en sorte que le premier chiffre à droite exprime des unités de l'ordre énoncé.*

Soit proposé de trouver le quotient de 3,1415926535... par 0,69314718..., à moins de 0,001. On reconnaît immédiatement que, le quotient étant compris entre 1 et 10, son premier chiffre significatif exprimera des unités simples, et comme le dernier doit exprimer des millièmes, le quotient aura quatre chiffres; donc on prendra $\bar{6}9314$ pour premier diviseur, 31459 pour premier dividende, et en observant la règle précédente, on trouvera 4,532 pour le quotient demandé :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 314159 | $\bar{6}9314$ | 3 1 4 1 5 9 2 6 5,3 .. | $\bar{6}9,3,1,4,7...$ |
| 36903 | 4532 | 3 6 9 0 3 2 6,5,3... | 4532 |
| 2248 | | 2 2 4 8 2,6,5... | |
| 169 | | 1 6 9,2,6... | |
| 31 | | 3 1,2 6... | |

*Démonstration.* En multipliant le dividende proposé par 1000, on ramène la question à la recherche du quotient de 3141,59... par 0,6931... à moins d'une unité; et en multipliant le nouveau dividende et le diviseur proposé par 100000, ce qui ne change pas le quotient, on est conduit à chercher, à moins d'une unité, le quotient de 314159265,3... par 69314,7.... Or ce diviseur, ayant cinq chiffres à sa partie entière et 6 pour premier chiffre, vaut au moins 60000, tandis que le quotient, n'ayant que quatre chiffres à sa partie entière, est moindre que 10000; donc la partie entière du diviseur excède six fois le quotient, et en prenant 69314 pour premier diviseur, on a augmenté le quotient d'une quantité moindre que $\frac{1}{6}$ (VII, cor. II). La première division partielle donne le premier chiffre 4 des mille du quotient et un reste 36903265,3... qu'il faudrait diviser par 69314 pour compléter ce quotient; mais en divisant ces deux nombres par 10, on ramène l'opération à la division de 3690326,5... par 6931, 4. On voit, comme précédemment, que la partie entière 6931 de ce diviseur excède six fois le quotient; donc, en prenant 6931 pour second diviseur, on a augmenté le quotient d'une quantité moindre que $\frac{1}{6}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'ayant obtenu le quotient 4532 et le reste 31,26..., on ait augmenté le quotient d'une quantité moindre que $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire moindre qu'une unité. Mais, en négligeant de diviser le dernier reste 31,26... par 69, on a diminué le quotient d'une quantité moindre que l'unité; donc, en définitive, l'erreur commise sur le quotient est moindre que l'unité; et, en divisant le nombre entier 4532 par 1000, le quotient 4,532 sera une valeur approchée du quotient proposé à moins de 0,001.

*Remarque* I. La règle et la démonstration précédentes n'exigent aucune modification dans le cas particulier où un dividende partiel contient dix fois le diviseur qui lui correspond. Alors on prend 10 pour quotient partiel en augmentant d'une unité le chiffre précédemment obtenu au quotient et écrivant un zéro à sa droite; et si l'on continue d'observer la règle de la division abrégée, on reconnaît immédiatement que tous les chiffres suivants du quotient seront des zéros. De plus, on est certain que le quotient ainsi obtenu est approché par excès; car le nombre formé par les chiffres déjà écrits au quotient, avant que ce cas particulier se soit présenté, ne peut être trop petit, puisqu'on a constamment employé des diviseurs trop petits.

*Remarque* II. L'erreur commise par excès sur le quotient, en remplaçant le diviseur 69314,7... par sa partie entière, est égale (VII) à $4532,\ldots \times \frac{0,7\ldots}{69314}$. Or le quotient $4532,\ldots$ est moindre que $(4+1)\times 1000$, et la partie décimale $0,7\ldots$ du diviseur est moindre que $\frac{7+1}{10}$; de plus, la partie entière du diviseur est au moins égale à 69000; donc l'erreur absolue du quotient est moindre que

$$\frac{(4+1)\times 1000\times \frac{7+1}{10}}{69000} = \frac{\frac{1}{10}(7+1)(4+1)}{69}:$$

l'erreur commise par excès sur le quotient, en remplaçant le diviseur 6931,4 par sa partie entière, est $532,\ldots \times \frac{0,4}{6931}$; et on a

$$532,\ldots \times \frac{0,4}{6931} < \frac{\frac{1}{10}(5+1)\times 4\times 100}{6900} = \frac{5+1}{10}\,\frac{4}{69} = \text{ou} < \frac{4}{69}.$$

On voit de même que la troisième erreur par excès commise sur le quotient est moindre que

$$\frac{3+1}{10}\times\frac{1}{69} = \text{ou} < \frac{1}{69},$$

et que la quatrième erreur par excès est moindre que

$$\frac{2+1}{10}\times\frac{3}{69} = \text{ou} < \frac{3}{69};$$

donc la somme des erreurs par excès commises sur le quotient est moindre que

$$\frac{1}{69}\left[3+1+4+\frac{1}{10}(7+1)(4+1)\right],$$

et, pour que cette somme soit moindre que l'unité, il suffira que le dernier diviseur 69 soit au moins égal à la somme $3+1+4$ des $n-1$ chiffres suivants, augmentée du dixième du produit $(c+1)\times(c'+1)$, $c$ étant le $n^{\text{ième}}$ chiffre qui suit le dernier diviseur 69, et $c'$ le premier chiffre du quotient. On pourra donc modifier la règle de la division abrégée en formant le premier diviseur partiel de la manière suivante : *Faisant abstraction de la virgule dans le nombre proposé, on marque sur la gauche du nombre qui en résulte le plus petit nombre au moins égal à la somme des $n-1$ chiffres suivants, augmentée du dixième du produit $(c+1)(c'+1)$, $c$ étant le $n^{\text{ième}}$ chiffre qui suit le nombre marqué sur la gauche du diviseur, et $c'$ le premier chiffre du quotient ; le nombre formé par les chiffres* *pris sur la gauche du diviseur et les n — 1 chiffres suivants sera le premier diviseur partiel.* Cette deuxième règle de division abrégée, qui ne diffère de la première que par la manière de former le premier diviseur partiel, a sur celle-ci l'avantage de simplifier quelquefois les divisions partielles en permettant d'employer un ou deux chiffres de moins dans chaque diviseur partiel. Ainsi, par exemple, pour obtenir, à moins de 0,01, le quotient de la division du nombre $\pi = 3,14159\ldots$ par $\log 2 = 0,3010299\cdots$, il suffira de prendre 3010 (au lieu de 301029) pour premier diviseur (*). Enfin la seconde règle a aussi sur la première l'avantage de faire connaître (*rem*. III) presque toujours le sens de l'approximation, et, par suite, les chiffres exacts du quotient demandé. Mais l'énoncé plus simple de la première règle et sa démonstration plus élémentaire la mettant plus à la portée des élèves peu exercés, nous avons dû la préférer à la seconde.

*Remarque* III. La somme des erreurs par excès commises sur le quotient est (*rem.* II) moindre que

$$\frac{(7+1)(4+1)+4(5+1)+1(3+1)+3(2+1)}{690}$$

ou que

$$\frac{40+24+4+9}{690}=\frac{77}{690}.$$

On trouve de la même manière que cette somme d'erreurs est plus grande que

$$\frac{7\times4+4\times5+1\times3+3\times2}{700}=\frac{57}{700}.$$

De plus, l'erreur commise par défaut, en omettant de diviser le dernier reste $31,2\ldots$ par 69, est comprise entre $\frac{31,2}{69}$ et $\frac{31,3}{69}$, ou entre $\frac{312}{690}$ et $\frac{313}{90}$.

Or on a $\frac{77}{690}<\frac{312}{690}$; donc 4532 est une valeur approchée par défaut à moins d'une unité, et, par suite, 2 est le chiffre exact des unités simples.

## Exercices.

**1.** *Trouver une valeur approchée du produit* $113\,\pi$ *à moins d'un dix-millième.*

*Réponse* : 355. On en conclut que $\frac{355}{113}$ est une valeur de $\pi$ approchée par excès à moins d'un millionième.

---

(*) La méthode de M. Guy exigerait l'emploi des huit premiers chiffres de log 2 pour la première division.

**2.** *Trouver une valeur approchée du produit* $10\pi \times 10\sqrt{2}$ *avec une erreur relative moindre qu'un millième.*

1°. On multiplie 31,41 par 14,14, et l'on conserve les quatre premiers chiffres à gauche du produit 444,1374, en augmentant le dernier d'une unité, ce qui donne 444,2.

2°. On multiplie 31,4159 par 14,1421 en plaçant le multiplicateur renversé sous le multiplicande de manière que leurs chiffres extrêmes se correspondent, et l'on trouve 444,3.

**3.** *Trouver l'inverse du nombre* $\pi$ *avec sept chiffres décimaux exacts et en déduire une valeur approchée, à moins d'un mètre, du rayon de la terre supposée sphérique.*

1°. On divise l'unité par $\pi$ en prenant 31415926 pour premier diviseur partiel (X, *rem.* II et III), ce qui donne 0,3183098.

2°. On double l'inverse de $\pi$, abstraction faite de la virgule, et l'on augmente le résultat d'une unité, ce qui donne 6366197 mètres.

**4.** *Trouver une valeur approchée du quotient de la division du nombre* $10\pi$ *par* 0,69314718... *avec une erreur relative moindre qu'un millième.*

1°. On divise 31,41 par 0,6932 en s'arrêtant au quatrième chiffre du quotient qu'on augmente de 0,01, et l'on trouve 45,32.

2°. On cherche les quatre premiers chiffres à gauche du quotient

$$10\pi : 0,69314718\ldots$$

en observant la règle de la division abrégée, et l'on trouve 45,32.

**5.** *Trouver, à moins d'une unité, le rapport du rayon d'un cercle à l'arc d'une seconde.*

*Réponse :* 206265 (IX).

**6.** *Trouver, à moins d'un millième de seconde, la valeur de l'angle au centre correspondant à l'arc équivalent au rayon.*

*Réponse :* 57° 17′ 44″,806 (X).

**7.** *Quelle est la plus petite unité, entière ou décimale, à moins de laquelle on puisse obtenir le produit* $27,1828\ldots \times 314,159\ldots$ *de deux nombres dont les chiffres donnés sont exacts ?*

*Réponse :* Un dixième (V).

**8.** *Quelle est la plus petite unité, entière ou décimale, à moins de laquelle on puisse obtenir le quotient* $\dfrac{3,141\ldots}{0,3010\ldots}$ *de deux nombres dont les chiffres donnés sont exacts ?*

*Réponse :* Un millième (X, *rem.* II).