NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHARLES MÉRAY

Théorèmes sur l'intersection de trois coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 111-112

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__111_1>

THÉORÈMES SUR L'INTERSECTION DE TROIS CONIQUES;

PAR M. MÉRAY (CHARLES),
Eleve de l'institution Barbet.

Soient trois coniques O, O', O'', tangentes à deux mêmes droites L, L' (réelles ou imaginaires) se coupant au point T; de deux points P, Q menons-leur des tangentes; désignons par A, B, A', B', A'', B'' les tangentes menées du point P respectivement aux coniques O, O', O''; désignons de même par C, D, C', D', C'', D'' les tangentes menées du point Q. Le quadrilatère formé par les quatre droites A, B, C, D est circonscrit à la conique O, ses sommets sont $\widehat{AC}$, $\widehat{BD}$, $\widehat{AD}$, $\widehat{BC}$, donc les quatre droites $T.\widehat{AC}$, $T.\widehat{BD}$, $T.\widehat{AD}$, $T.\widehat{BC}$ sont en involution, d'une part avec les droites L, L', de l'autre avec les droites TP, TQ. Si nous considérons de même le quadrilatère A', B', C', D', les droites $T.\widehat{A'C'}$, $T.\widehat{B'D'}$, $T.\widehat{A'D'}$, $T.\widehat{B'C'}$ sont en involution, d'une part avec les droites L, L', de l'autre avec les droites TP, TQ; il en est de même pour le quadrilatère A'', B'', C'', D''. Nous avons donc le théorème suivant, dû à M. Laguerre :

1er Théorème. *Quand trois coniques sont tangentes à deux mêmes droites (réelles ou imaginaires) se coupant en* T; *si de deux points on leur mène des tangentes, ces droites formeront trois quadrilatères circonscrits aux coniques : en joignant le point* T *à trois couples quelconques de sommets opposés, on aura un faisceau en involution.*

Considérons trois coniques O, O′, O″ ayant en commun deux points ε, φ (réels ou imaginaires). Coupons ces coniques par deux droites L, L′; soient a, b, c, d les intersections de la conique O avec les droites L, L′; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'' les intersections des coniques O′, O″ avec les mêmes droites. Le quadrilatère a, b, c, d est inscrit à la conique O; donc les quatre points $\widehat{\varepsilon\varphi, ac}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, bd}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, ad}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, bc}$ sont en involution, d'une part avec les points ε, φ, de l'autre avec les points $\widehat{\mathrm{L}, \varepsilon\varphi}$, $\widehat{\mathrm{L}', \varepsilon\varphi}$; de même les quatre points $\widehat{\varepsilon\varphi, a'c'}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, b'd'}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, a'd'}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, b'c'}$ sont en involution, d'une part avec ε, φ, de l'autre avec $\widehat{\mathrm{L}, \varepsilon\varphi}$, $\widehat{\mathrm{L}', \varepsilon\varphi}$; il en est de même pour le quadrilatère a'', b'', c'', d''. Nous avons donc le théorème suivant :

2e Théorème. *Quand trois coniques passent par les deux mêmes points* ε, φ *(réels ou imaginaires); si on coupe ces coniques par deux droites, on aura trois quadrilatères inscrits : les intersections des côtés opposés avec la corde* $\varepsilon\varphi$ *fourniront six couples de points; trois quelconques de ces couples sont en involution.*

Si les sécantes coïncident, on a le théorème :

3e Théorème. *Quand trois coniques passent par deux mêmes points* ε, φ; *si on les coupe par une droite et qu'on mène les tangentes aux points d'intersection, ces tangentes détermineront sur la corde commune six points en involution.*