

J.-A. SERRET

Théorème d'arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 414-416

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__414_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. J.-A. SERRET.

(*Traité d'Arithmétique* de M. Serret, page 116.)

Soient

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_t,$$

t nombres entiers quelconques.

Soient

P_1 le produit de tous ces nombres ;

P_λ le produit des plus grands communs diviseurs de ces
mêmes nombres considérés λ à λ ;

P_t le plus grand commun diviseur de tous les nombres.

Soient enfin

$$M = \frac{P_1 P_3 P_5 \dots P_{t-1}}{P_2 P_4 P_6 \dots P_t} \text{ si } t \text{ est pair,}$$

ou

$$M = \frac{P_1 P_2 P_4 \dots P_t}{P_3 P_5 P_7 \dots P_{t-1}} \text{ si } t \text{ est impair.}$$

Je dis que M est le plus petit commun multiple des nombres proposés (LEBESGUE, *Journal de Mathématiques*, tome II, page 258; 1837).

Démonstration. Soit θ un facteur premier divisant h des nombres proposés

$$A_1, A_2, \dots, A_k;$$

par exemple, soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$$

les exposants des puissances de θ les plus élevées par lesquelles ces nombres sont respectivement divisibles. Je supposerai, pour fixer les idées, que ces exposants sont rangés par ordre de grandeur à partir du plus petit; en sorte que chacun d'eux peut être égal, mais non inférieur au précédent.

La plus haute puissance de θ qui divise P_1 a pour exposant

$$\varpi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k.$$

Cherchons généralement l'exposant ϖ_λ de la plus haute puissance de θ contenue dans P_λ .

Comme ceux des nombres proposés qui ne font pas partie de la série

$$A_1, A_2, \dots, A_k,$$

n'admettent pas le facteur θ , P_λ n'est divisible par θ que si λ est inférieur ou au plus égal à k , et il est évident que, pour avoir ϖ_λ , il suffit de former tous les groupes de λ nombres parmi $A_1, A_2, A_k, \dots$; de prendre dans chaque groupe le plus grand commun diviseur de tous les nombres, puis l'exposant de la plus haute puissance de θ , qui le divise; et enfin d'ajouter ces exposants. Or, dans cette somme d'exposants, ou dans ϖ_λ , α_1 se trouvera autant de fois qu'il y a de groupes renfermant A_1 ; α_2 se trouvera autant de fois qu'il y a de groupes renfermant A_2 et ne renfermant pas A_1 ; α_3 se trouvera autant de fois qu'il y a de groupes renfermant A_3 et ne renfermant ni A_2 ni A_1 ; et ainsi de suite, jusqu'à $\alpha_{k-\lambda+1}$, qui ne se trouvera qu'une seule fois. En désignant donc par C_μ le nombre des combinaisons de μ lettres $\lambda-1$ à $\lambda-1$, on aura

$$\varpi_\lambda = C_{k-1}\alpha_1 + C_{k-2}\alpha_2 + C_{k-3}\alpha_3 + \dots + C_\lambda\alpha_{k-\lambda} + \alpha_{k-\lambda+1},$$

ou

$$\begin{aligned} \varpi_\lambda = & \frac{(k-1) \dots (k-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \dots (\lambda-1)} \alpha_1 + \frac{(k-2) \dots (k-\lambda)}{1 \cdot 2 \dots (\lambda-1)} \alpha_2 + \dots \\ & + \frac{(k-f) \dots (k-f-\lambda+2)}{1 \cdot 2 \dots (\lambda-1)} \alpha_f + \dots + \alpha_{k-\lambda+1}. \end{aligned}$$

On a, d'après cela,

$$\varpi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_f + \dots + \alpha_k,$$

$$\varpi_2 = \frac{k-1}{1} \alpha_1 + \frac{k-2}{1} \alpha_2 + \dots + \frac{k-f}{1} \alpha_f + \dots + \alpha_{k-1},$$

$$\begin{aligned}\varpi_3 &= \frac{(k-1)(k-2)}{1.2} \alpha_1 + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2} \alpha_2 + \dots \\ &\quad + \frac{(k-f)(k-f-1)}{1.2} \alpha_f + \dots + \alpha_{k-1}, \\ \dots\dots\dots \\ \varpi_{k-1} &= \frac{(k-1)\dots 2}{1.2\dots(k-2)} \alpha_1 + \frac{(k-2)\dots 1}{1.2\dots(k-1)} \alpha_2, \\ \varpi_k &= \frac{(k-1)\dots 1}{1.2\dots(k-1)} \alpha_1.\end{aligned}$$

Si ϖ désigne l'exposant de θ au numérateur de la fraction M supposée réduite à sa plus simple expression, on aura

$$\varpi = \varpi_1 - \varpi_2 + \varpi_3 - \varpi_4 + \dots \pm \varpi_{k-1} \mp \varpi_k,$$

donc

$$\begin{aligned}\varpi &= \alpha_1 \left[1 - \frac{k-1}{1} + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2} + \dots \pm \frac{(k-1)\dots 2}{1.2\dots(k-2)} \right. \\ &\quad \left. \mp \frac{(k-1)\dots 1}{1.2\dots(k-1)} \right] \\ &\quad + \alpha_2 \left[1 - \frac{k-2}{1} + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2} - \dots \pm \frac{(k-2)\dots 1}{1.2\dots(k-2)} \right] \\ &\quad + \dots\dots\dots \\ &\quad + \alpha_f \left[1 + \frac{(k-f)}{1} + \frac{(k-f)(k-f-1)}{1.2} - \dots \pm \frac{(k-f)\dots 2.1}{1.2\dots(k-f)} \right] \\ &\quad + \alpha_{k-1} (1-1) \\ &\quad + \alpha_k.\end{aligned}$$

Les coefficients de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ sont nuls; car ce sont les puissances $k-1, k-2$, etc., du binôme $1-1$; donc

$$\varpi = \alpha_k.$$

Il suit de là que M est un nombre entier, et la puissance de θ , qui le divise, est précisément la plus haute puissance de θ par laquelle l'un des nombres proposés est divisible; donc M est le plus petit multiple commun des nombres proposés.

C. Q. F. D.