

JULLIEN

Solution de la question 195 (Plucker)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 398-400

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__398_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 193 (PLÜCKER)

(voir t VII, p 368),

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,

Du séminaire de Vals.

THÉORÈME. *Trois cercles étant donnés dans un même plan ; construisant un cercle coupant rectangulairement l'un des deux cercles donnés, et passant par les intersections des deux autres ; les trois nouveaux cercles passent par les deux mêmes points.*

Démonstration. Soient A, B, C les centres des cercles donnés, $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$ leurs rayons, A_1, B_1, C_1 les centres des nouveaux cercles ; les mêmes lettres se rapportant aux cercles qui se coupent rectangulairement.

Prouvons que les axes radicaux des cercles A_1, B_1, C_1 ont un point commun non situé à l'infini ; de plus, que les centres de ces cercles sont en ligne droite, et le théorème sera démontré.

Les axes radicaux des cercles A et B_1 , A et C_1 concourent au centre radical des cercles A, B, C ; donc l'axe radical des cercles B_1 et C_1 passe en ce point. On démontre de même que les deux autres axes radicaux des cercles A_1, B_1, C_1 passent en ce point.

Appliquons le théorème des transversales au triangle ABC , et, pour cela, déterminons le segment A_1C_1 .

A_1, B_1, C_1 sont respectivement les côtés BC, AC, AB du triangle ABC , représentés par a, b, c .

Représentant par E, D les intersections des cercles B et C , par F la rencontre de la corde ED avec la droite BC ,

et par G le pied d'une perpendiculaire abaissée de A sur cette même droite BC, on a

$$\begin{aligned}\overline{A_1D}^2 &= \overline{A_1F}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{A_1C}^2 + 2 A_1C \times CF + r_\gamma^2 \\ &= \overline{A_1C}^2 + A_1C \frac{r_\gamma^2 - r_\beta^2 + a^2}{a} + r_\gamma^2,\end{aligned}$$

$$(1) \quad \overline{A_1A}^2 = r_\alpha^2 + \overline{A_1D}^2 = \overline{A_1C}^2 + A_1C \frac{r_\gamma^2 - r_\beta^2 + a^2}{a} + r_\alpha^2 + r_\gamma^2.$$

D'un autre côté,

$$(2) \quad \overline{A_1A}^2 = \overline{A_1C}^2 \pm 2 A_1C \times CG + b^2 = \overline{A_1C}^2 + A_1C \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} + b^2.$$

Égalant les seconds membres des égalités (1) et (2), on obtient

$$A_1C = \frac{a(b^2 - r_\alpha^2 - r_\gamma^2)}{c^2 - b^2 + r_\gamma^2 - r_\beta^2},$$

puis, en vertu de la symétrie, et par permutation tournante,

$$\begin{aligned}B_1A &= \frac{b(c^2 - r_\beta^2 - r_\alpha^2)}{a^2 - c^2 + r_\alpha^2 - r_\gamma^2}, \\ C_1B &= \frac{c(a^2 - r_\gamma^2 - r_\beta^2)}{b^2 - a^2 + r_\beta^2 - r_\alpha^2}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}A_1B &= A_1C + a = \frac{a(c^2 - r_\beta^2 - r_\alpha^2)}{c^2 - b^2 + r_\gamma^2 - r_\beta^2}, \\ B_1C &= \frac{b(a^2 - r_\gamma^2 - r_\beta^2)}{b^2 - a^2 + r_\alpha^2 - r_\gamma^2}, \\ C_1A &= \frac{c(b^2 - r_\alpha^2 - r_\gamma^2)}{c^2 - b^2 + r_\beta^2 - r_\alpha^2};\end{aligned}$$

$$A_1C \times B_1A \times C_1B = A_1B \times B_1C \times C_1A.$$

Les centres A_1, B_1, C_1 sont donc en ligne droite.

Il est à remarquer que les six cercles A, B, C, A_1, B_1, C_1

(400)

peuvent être considérés de quatre manières différentes ,
comme partagés en deux groupes de trois cercles, ayant
entre eux les mêmes relations que les cercles A, B, C,
et A_1 , B_1 , C_1 .