NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sur la différentiation des fonctions de fonctions. Séries de Burmann, de Lagrange, de Wronski

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 376-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__376_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE FONCTIONS. SÉRIES DE BURMANN, DE LAGRANGE, DE WRONSKI;

PAR M. A.,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

§ II.

Dans le paragraphe précédent (*Nouvelles Annales*, tome IX, page 119), nous avons montré que si l'on a $z = F(y)$, $y = \varphi(x)$, on trouve, en désignant pour abréger $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ par θ,

$$\frac{d^n z}{dx^n}=\frac{n}{1}\frac{dz}{dy}\frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{m-1}}+\frac{n.n-1}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2}\frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}}+\ ..\ (*),$$

équation qui peut s'écrire sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^n z}{dx^n}&=(\theta^n)_0\frac{d^n z}{dy^n}+\frac{n}{1}\frac{d(\theta^{n-1})_0}{dh}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\\&+\frac{n.n-1}{1.2}\frac{d^2(\theta^{n-2})_0}{dh^{n-2}}\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant qu'on ait $z=\mathrm{F}(x)$ et $y=\varphi(x)$; cherchons $\frac{d^n z}{dy^n}$. Il est évident que z et y étant des fonctions de x, on pourra regarder z comme une fonction implicite de y, et alors on aura, d'après l'équation (1),

$$\frac{d^n z}{dx^n}=(\theta^n)_0\frac{d^n z}{dy^n}+\frac{n}{1}\frac{d(\theta^{n-1})_0}{dh}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}$$
$$+\frac{n.n-1}{1.2}\frac{d^2(\theta^{n-2})_0}{dh^2}\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots,$$

$$\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}=(\theta^{n-1})_0\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}+\frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{n-2})_0}{dh}\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots,$$

....

$$\frac{d^{n-m}z}{dx^{n-m}}=(\theta^{n-m})_0\frac{d^{n-m}z}{dy^{n-m}}+\frac{n-m}{1}\frac{d(\theta^{n-m-1})_0}{dh}\frac{d^{n-m-1}z}{dy^{n-m-1}}+\ldots,$$

....

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=(\theta^2)_0\frac{d^2 z}{dy^2}+\frac{2}{1}\frac{d(\theta)_0}{dh}\frac{dz}{dy},$$

$$\frac{dz}{dx}=(\theta)_0\frac{dz}{dy}.$$

Multiplions ces équations, en commençant par la première, respectivement par

$$(\theta^{-n})_0,\quad \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh},\quad \frac{n-1.n-2}{1.2}\frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2},\ldots,\ \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}},$$

(*) Le *zéro* indique qu'il faut faire $h=0$, après les differentiations.

et faisant la somme, je dis qu'on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^n z}{dy^n} &= (\theta^{-n})_0 \frac{d^n z}{dx^n} + \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \\ &+ \frac{n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2} \frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2} \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \ldots . \end{aligned}\right.$$

Pour le prouver, dans la somme des produits ci-dessus, prenant le coefficient du terme multiplié par $\frac{d^{n-m} z}{dy^{n-m}}$, que nous désignerons par $\frac{n-1 \,.\, n-2 \ldots n-m+1}{1 \,.\, 2 \; 3 \ldots m-1} \cdot C$, on aura, en mettant $\frac{n-1 \,.\, n-2 \ldots \; n-m+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m-1}$ en facteur commun,

$$\begin{aligned} C &= n(\theta^{-n})_0 \frac{d^m(\theta^{n-m})_0}{dh^m} + (n-1) \cdot \frac{m}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \ldots \\ &+ (n-m+1) \cdot \frac{m}{1} \frac{d^{m-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{m-2}} \frac{d(\theta^{n-m})_0}{dh} \\ &+ n-m \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0. \end{aligned}$$

Cette équation peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} C = n &\left[(\theta^{-n})_0 \frac{d^m(\theta^{n-m})_0}{dh^m} + \frac{m}{1} \cdot \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \ldots + \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0 \right] \\ - m &\left[\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \frac{m-1}{1} \frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2} \cdot \frac{d^{m-2}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-2}} + \ldots + \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0 \right]. \end{aligned}$$

Or la quantité comprise entre les premières parenthèses n'est autre chose que le développement de

$$\frac{d^m(\theta^{-n} \; \theta^{n-m})_0}{dh^m} = \frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m}.$$

De même, la quantité comprise entre les secondes parenthèses, est le développement de

$$\frac{d^{m-1}\left[\frac{d(\theta^{-n})}{dh}\cdot\theta^{n-m}\right]_0}{dh^{m-1}} = -n\frac{d^{m-1}\left(\theta^{-m-1}\frac{d\theta}{dh}\right)_0}{dh^{m-1}}$$
$$= \frac{n}{m}\frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m}.$$

On a donc

$$C = n\left[\frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m} - \frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m}\right] = 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

L'équation (2) peut se mettre sous une forme plus concise. En effet, on a en général

$$\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{d^m F(x+h)_0}{dh^m}.$$

Si donc on pose

$$z = F(x),$$

on aura

$$(3)\qquad \frac{d^n F(x)}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}F'(x+h)]_0.$$

L'équation (3) donne une démonstration très-simple et très-directe de la série de Burmann.

En effet, soit x une fonction de y donnée par l'équation

$$y = \varphi(x).$$

Concevons qu'on ait tiré de cette équation x en fonction de y, et que dans la fonction $F(x)$ on ait remplacé x par sa valeur en y. Alors si $F(x)$ devient une fonction continue de y, on pourra développer, par le théorème de Taylor, $F(x)$ suivant les puissances de y, et l'on aura un développement de la forme

$$F(x) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots.$$

Pour déterminer A_n, différentions n fois cette série, et faisons ensuite $y = 0$, on aura

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\,..n} \frac{d^n F(x)}{dy^n},$$

en ayant soin de faire $y = 0$, après les différentiations. Mais, d'après l'équation (3), on a

$$\frac{d^n F(x)}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} [\theta^{-n} F'(x+h)]_0.$$

Par suite, si l'on désigne par a la valeur de x qui correspond à $y = 0$, on aura

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ .\ n} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} \left\{ \left[\frac{\varphi(a+h)}{h} \right]^{-n} F'(a+h) \right\}_0.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \qquad A_n = \frac{1}{1.2.3...n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \left[\frac{x-a}{\varphi(x)} \right]^n F'(x) \right\}_{(x=a)}.$$

Nous ne nous occuperons pas ici de savoir quelles sont les conditions sous lesquelles cette série de Burmann peut exister. Ce sera l'objet d'un autre article. Nous avons seulement voulu faire voir avec quelle facilité l'équation (3) permettait de déterminer les coefficients de cette série.

Si l'on fait $\varphi x = \frac{x-a}{\psi(x)}$ dans l'équation (4), alors

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ .\ n} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\psi(a)^n F'(a)].$$

On a donc ce théorème trouvé par Lagrange :

Si l'on a l'équation $x = a + y\psi(x)$, l'expression d'une fonction $F(x)$ d'une racine de cette équation sera donnée par la série suivante :

$$F(x) = F(a) + [\psi(a) F'(a)] y + \frac{d}{da} [\psi(a)^2 F'(a)] \frac{y^2}{1.2} + \ldots.$$

Si dans l'équation (2) nous faisons successivement

$z = y, y^2, \ldots, y^n$, on aura les identités suivantes, en désignant, pour abréger, $\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}$ par $D^n\varphi(x)$,

$$
(A)\left\{
\begin{aligned}
0 &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x) + \frac{n-1}{1}\cdot\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1}\varphi(x) + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x), \\
0 &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^2 + \frac{n-1}{1}\cdot\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}.D^{n-1}.\varphi(x)^2 + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^{n-1} + \frac{n-1}{1}\cdot\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}.D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1} + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^{n-1}, \\
1.2.3\ldots n &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^n + \frac{n-1}{1}\cdot\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}.D^{n-1}.\varphi(x)^n + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^n.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces identités nous montrent que si l'on a les équations

$$
\begin{aligned}
&D.\varphi(x).y_1 + D^2.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D.\varphi(x)^n.y_n = DF(x), \\
&D^2.\varphi(x).y_1 + D^2.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D^2.\varphi(x)^n.y_n = D^2F(x), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&D^{n-1}\varphi(x).y_1 + D^{n-1}\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D^{n-1}\varphi(x)^n.y_n = D^{n-1}F(x), \\
&D^n\varphi(x).y_1 + D^n\varphi(x)^2 y^2 + \ldots + D^n\varphi(x)^n.y_n = D^nF(x),
\end{aligned}
$$

on trouvera, en les multipliant respectivement par

$$\frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}},\ \frac{n-1}{1}\ \frac{d^{n-2}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-2}}, \ldots (\theta^{-n})_0,$$

$$
\begin{aligned}
1.2.3\ldots ny_n &= (\theta^{-n})_0 D^n F(x) + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})}{dh}.D^{n-1}F(x) + \ldots \\
&= \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}.F'(x+h)]_0.
\end{aligned}
$$

Mais si l'on résout les équations (A) à la manière ordinaire, on aura

$$y_n = \frac{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2 \ldots D^{n-1}\varphi(x)^{n-1}.D^n F(x)]}{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2 \ldots D^{n-1}\varphi(x)^{n-1}.D^n\varphi(x)^n]},$$

les déterminants du numérateur et du dénominateur étant formés par rapport aux indices de différentiation.

En égalant ces deux valeurs de y_n, on aura

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\dfrac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\cdot[\theta^{-n}.F'(x+h)]_0}{1.2.3\ldots n} \\ &= \frac{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^n F(x)]}{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^n\varphi(x)]^n}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on développe les deux membres de cette équation suivant les dérivées de F (x), à cause de l'indétermination de cette fonction, les coefficients de chacune de ces dérivées devront être identiques. On aura donc, en égalant les coefficients de $D^n F(x)$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}(\theta^{-n})_0 = \frac{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}\varphi(x)^{n-1}]}{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^n\varphi(x)^n]}.$$

On tirera de là

$$(\beta)\quad \left\{ \begin{aligned} &S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^n\varphi(x)^n] \\ &= 1!2!\ldots n!\left(\theta^{-\frac{n.n+1}{2}}\right)_0 = 1!2!\ldots n![D\varphi(x)]^{\frac{n.n+1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

et, par suite, l'équation (α) deviendra

$$(B)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}F'(x+h)] \\ &= \frac{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}\varphi(x)^{n-1}.D^n F(x)]}{1!2!3!\ldots n![D\varphi(x)]^{\frac{n.n+1}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Ce beau théorème ainsi que l'équation (β) sont dus à M. Wronski (*).

M. Prouhet a donné une belle démonstration de l'équation (β) fondée sur des considérations autres que celles dont nous nous sommes servi.