

P. TARDY

**Solution générale de la question
232 (Prouhet)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 345-355

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__345_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION GENERALE DE LA QUESTION 232 (PROUHET)

(voir t. X, p. 182),

PAR M. P. TARDY,

Professeur à Gênes.

P_0 étant l'aire d'un polygone convexe de n côtés;
 P_1 l'aire d'un polygone ayant pour sommets les milieux
des côtés du premier polygone; P_2 l'aire d'un polygone
ayant pour sommets les milieux des côtés du second po-
lygone, et ainsi de suite; il s'agit de démontrer qu'on a

$$(A) \left\{ \begin{aligned} & P_0 - \frac{n^2 - 2^2}{1.2.3} P_1 + \frac{(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{1.2.3.4.5} P_2 - \dots \\ & + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2) \dots [n^2 - (n-2)^2]}{1.2.3 \dots (n-1)} P_{\frac{n-2}{2}} = 0, \end{aligned} \right.$$

si n est pair, et

$$(B) \left\{ \begin{aligned} & P_0 - \frac{n^2 - 1^2}{1.2} P_1 + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{1.2.3.4} P_2 - \dots \\ & + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2) \dots [n^2 - (n-2)^2]}{1.2.3 \dots (n-1)} P_{\frac{n-1}{2}} = 0, \end{aligned} \right.$$

si n est impair.*Lemme.* Soit la série hypergéométrique

$$(a) \left\{ \begin{aligned} & \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = 1 - \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\delta} \cdot \frac{\gamma}{\varepsilon} x \\ & + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\delta(\delta+1)} \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)}{\varepsilon(\varepsilon+1)} x^2 - \dots \end{aligned} \right.$$

En mettant $\alpha + 1$ pour α et $\beta + 1$ pour ε , et ôtant la

série primitive, on obtient la relation

$$(b) \quad \begin{cases} \varphi(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma, \delta, \varepsilon) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \\ - \frac{\gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{\alpha + \beta + 1}{\delta} x \cdot \varphi(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, \delta + 1, \varepsilon + 1). \end{cases}$$

De la même manière on aura

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha + 2, \beta + 2, \gamma, \delta, \varepsilon) &= \varphi(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma, \delta, \varepsilon) \\ &+ M \varphi(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, \delta + 1, \varepsilon + 1), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha + 2, \beta + 2, \gamma, \delta, \varepsilon) &= \varphi + \lambda_1 \varphi(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, \delta + 1, \varepsilon + 1) \\ &+ \lambda_2 \varphi(\alpha, \beta + 2, \gamma + 2, \delta + 2, \varepsilon + 2); \end{aligned}$$

et en général par une continuelle application de la relation (b), on arrive à cette formule

$$(c) \quad \begin{cases} \varphi(\alpha + m, \beta + m, \gamma, \delta, \varepsilon) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \\ + A_1 \varphi(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, \delta + 1, \varepsilon + 1) + \dots \\ + A_m \varphi(\alpha, \beta + m, \gamma + m, \delta + m, \varepsilon + m). \end{cases}$$

De là nous pouvons conclure que si pour des valeurs particulières de $x, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, on a

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = 0,$$

et

$$\varphi(\alpha, \beta + \mu, \gamma + \mu, \delta + \mu, \varepsilon + \mu) = 0,$$

μ désignant un entier quelconque, la série (a) sera toujours nulle, lorsque sans changer $x, \gamma, \delta, \varepsilon$, on augmente α et β d'un entier m à volonté.

Cela posé, soient $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ les coordonnées des n sommets du polygone donné; les coordonnées des sommets du premier polygone inscrit seront

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \frac{x_2 + x_3}{2}, \\ \frac{x_3 + x_4}{2}, \quad \dots, \quad \frac{x_n + x_1}{2}, \quad \frac{y_n + y_1}{2}. \end{aligned}$$

celles des sommets du second polygone inscrit seront

$$\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}, \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4}, \dots,$$

$$\frac{x_n + 2x_1 + x_2}{4}, \frac{y_n + 2y_1 + y_2}{4};$$

et en général en appelant $x_q^{(p)}$, $y_q^{(p)}$ les coordonnées du sommet (q) du polygone inscrit de l'ordre (p) , nous aurons

$$x_q^{(p)} = \frac{1}{2^p} \left[(p)_0 \cdot x_q + (p)_1 \cdot x_{q+1} + (p)_2 \cdot x_{q+2} + \dots \right],$$

$$y_q^{(p)} = \frac{1}{2^p} \left[(p)_0 \cdot y_q + (p)_1 \cdot y_{q+1} + (p)_2 \cdot y_{q+2} + \dots \right],$$

où, pour abrégér, nous avons posé

$$(p)_m = \frac{p(p-1)\dots(p-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m},$$

et où il faut prendre les indices de x et de y égaux au reste de leur division par n toutes les fois qu'ils deviennent plus grands que n .

Si nous supposons $p < n$, puisqu'on a $(p)_m = 0$ pour $m > p$, nous pouvons écrire les valeurs des coordonnées $x_q^{(p)}$, $y_q^{(p)}$ ainsi :

$$x_q^{(p)} = \frac{1}{2^p} \left[(p)_0 x_q + (p)_1 x_{q+1} + \dots \right],$$

$$y_q^{(p)} = \frac{1}{2^p} \left[(p)_0 y_q + (p)_1 y_{q+1} + \dots \right].$$

Maintenant on sait que la surface P_p est donnée par l'expression

$$P_p = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & x_1^{(p)} y_2^{(p)} - x_2^{(p)} y_1^{(p)} + x_2^{(p)} y_3^{(p)} - x_3^{(p)} y_2^{(p)} + \dots \\ & + x_n^{(p)} y_1^{(p)} - x_1^{(p)} y_n^{(p)} \end{aligned} \right\}.$$

En substituant pour ces coordonnées leurs valeurs, et cherchant le coefficient θ_s du terme général $x_q y_{q+s}$, on trouvera, avec un peu d'attention,

$$\theta_s = \frac{1}{2^{s+1}} \left\{ \begin{array}{l} (p)_0 (p)_{s-1} + (p)_1 (p)_s + (p)_2 (p)_{s+1} + \dots + (p)_{n-s} (p)_{n-1} \\ + (p)_{n-s+1} (p)_0 + (p)_{n-s+2} (p)_1 + \dots + (p)_{n-1} (p)_{s-1} \\ - (p)_0 (p)_{s+1} - (p)_1 (p)_{s+2} - \dots - (p)_{n-s-2} (p)_{n-1} \\ - (p)_{n-s-1} (p)_0 - (p)_{n-s} (p)_1 - \dots - (p)_{n-1} (p)_s \end{array} \right.$$

Observons que ce coefficient est indépendant de q et dépend seulement de s ; qu'il s'évanouit pour $s = 0$ et pour $s = \frac{n}{2}$ dans le cas que n soit pair; qu'il revient le même si la différence entre les indices de y et de x est $s - n$; qu'il change de signe si cette différence devient $-s$, ou $n - s$.

Il n'est donc pas nécessaire de l'évaluer au delà de $s = \frac{n-2}{2}$ si n est pair, ou de $s = \frac{n-1}{2}$ si n est impair.

Pourtant si nous dénotons par A_s la somme des termes dans lesquels la différence entre les indices soit égale à s , ou à $s - n$, diminuée de la somme de ceux dans lesquels cette différence soit $-s$ ou $n - s$; c'est-à-dire si nous posons

$$A_s = x_1 y_{s+1} + x_2 y_{s+2} + \dots + x_{n-1} y_n + x_{n-s+1} y_1 + \dots + x_n y_s \\ - x_{s+1} y_1 - x_{s+2} y_2 - \dots - x_n y_{n-s}, \quad \text{ou } -x_1 y_{n-s+1} - \dots - x_s y_n,$$

il est clair que nous obtiendrons

$$P_p = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \dots + \frac{\theta_{n-2}}{2} A_{\frac{n-2}{2}}, \quad \text{pour } n \text{ pair,}$$

et

$$P_p = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \dots + \frac{\theta_{n-1}}{2} A_{\frac{n-1}{2}} \quad \text{pour } n \text{ impair.}$$

Maintenant, si nous limitons l'ordre p du dernier polygone inscrit à $\frac{n-2}{2}$ si n est pair, ou à $\frac{n-1}{2}$ si n est im-

pair, les coefficients binomiaux $(p)_{n-s}, (p)_{n-s+1}, (p)_{n-1}$ s'évanouiront tous, et la valeur de θ_s se réduira à

$$\theta_s = \frac{1}{2^{2p+1}} \left\{ \begin{array}{l} (p)_0(p)_{s-1} + (p)_1(p)_s + (p)_2(p)_{s+1} + \dots + (p)_{p-s+1}(p)_p \\ - (p)_0(p)_{s+1} - (p)_1(p)_{s+2} - (p)_2(p)_{s+3} - \dots - (p)_{p-s-1}(p)_p \\ - (p)_{n-s-1}(p)_0 \end{array} \right\}.$$

De la formule générale

$$(u+v)_m = (u)_m(v)_0 + (u)_{m-1}(v)_1 + (u)_{m-2}(v)_2 + \dots \\ + (u)_1(v)_{m-1} + (u)_0(v)_m$$

(Voir Cauchy, *Cours d'Analyse*, ch. IV, § 3, p. 100; 1821),
en faisant

$$u = v = p, \quad m = p - s + 1,$$

et en se rappelant que

$$(u)_\lambda = (u)_{u-\lambda},$$

on tire

$$(p)_0(p)_{s-1} + (p)_1(p)_s + (p)_2(p)_{s+1} + \dots \\ + (p)_{p-s+1}(p)_p = (2p)_{p-s+1},$$

et en faisant $m = p - s - 1$,

$$(p)_0(p)_{s+1} + (p)_1(p)_{s+2} + \dots + (p)_{p-s-1}(p)_p = (2p)_{p-s-1},$$

où l'on voit qu'il faut prendre $(2p)_{-} = 0$.

Le dernier terme de θ_s , $(p)_{n-s-1}(p)_0$ sera toujours nul, excepté le cas de $s = \frac{n-1}{2}$, parce qu'alors il devient $(p)_{\frac{n-1}{2}}$ et pour $p = \frac{n-1}{2}$ est égal à l'unité.

De cette manière, nous aurons

$$2^{2p+1} P_p = A_1[(2p)_p - (2p)_{p-2}] + A_2[(2p)_{p-1} - (2p)_{p-3}] + \dots \\ + A_{1+k}[(2p)_{p-k} - (2p)_{p-k-2}] + \dots \\ + A_{\frac{n-1}{2}}(2p)_{p-\frac{n-1}{2}}, \quad n \text{ pair};$$

$$2^{2p+1} P_p = A_1[2p_p - (2p)_{p-2}] + A_2[(2p)_{p-3}] + \dots \\ + A_{1+k}[(2p)_{p-k} - (2p)_{p-k-2}] + \dots \\ + A_{\frac{n-1}{2}} \left[(2p)_{p-\frac{n-3}{2}} - (p)_{\frac{n-1}{2}} \right], \quad n \text{ impair}.$$

Ayant égard ensuite à l'égalité

$$\begin{aligned}(2p)_{p-k} - (2p)_{p-k-1} &= 2 \cdot \frac{(2p+1)(1+k)}{(p-k-1)(p-k)} \cdot (2p)_{p-k-1} \\ &= 2 \cdot \frac{1+k}{p-k} (2p+1)_{p-k-1},\end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}2^{2p} P_p &= \frac{1}{p} (2p+1)_{p-1} \cdot A_1 + \frac{2}{p-1} (2p+1)_{p-2} \cdot A_2 + \dots \\ &\quad + \frac{1+k}{p-k} (2p+1)_{p-k-1} \cdot A_{1+k} + \dots \\ &\quad + \frac{\frac{n-4}{2}}{p - \frac{n-6}{2}} (2p+1)_{p - \frac{n-4}{2}} \cdot \frac{A_{n-1}}{2} \\ &\quad + \frac{\frac{n-2}{2}}{p - \frac{n-4}{2}} (2p+1)_{p - \frac{n-2}{2}} \cdot \frac{A_{n-2}}{2},\end{aligned}$$

si n est pair ; et

$$\begin{aligned}2^{2p} P_p &= \frac{1}{p} (2p+1)_{p-1} \cdot A_1 + \frac{2}{p-1} (2p+1)_{p-2} \cdot A_2 + \dots \\ &\quad + \frac{1+k}{p-k} (2p+1)_{p-k-1} \cdot A_{1+k} + \dots \\ &\quad + \frac{\frac{n-3}{2}}{p - \frac{n-5}{2}} (2p+1)_{p - \frac{n-3}{2}} \cdot \frac{A_{n-3}}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(2p)_{p - \frac{n-3}{2}} - (p)_{\frac{n-1}{2}} \right] \frac{A_{n-1}}{2},\end{aligned}$$

si n est impair.

Dans ces équations, il faut substituer au coefficient d'un terme quelconque du second membre, par exemple

de A_{1+k} , c'est-à-dire à la quantité $\frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1}$,
 $\frac{1}{2}(2p)_{p-k} = \frac{1}{2}$ lorsque p devient égal à k .

En opérant ces substitutions dans les formules (A), (B), et en réfléchissant que P_k sera la première à introduire le terme A_{1+k} , on aura, dans le cas de n pair, pour coefficient de A_{1+k} la série suivante :

$$(-1)^k \frac{(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2) \dots [n^2 - (2k)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2k+1)} \cdot \frac{1}{2^{2k+1}}$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{n^2 - (2k+2)^2}{(2k+2)(2k+3)} \cdot \frac{1}{2} \frac{1+k}{1} \cdot (2k+3)_0 \\ & + \frac{[n^2 - (2k+2)^2][n^2 - (2k+4)^2]}{(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)} \\ & \times \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1+k}{2} (2k+5)_1 - \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}-k} \\ & \times \frac{[n^2 - (2k+2)^2][n^2 - (2k+4)^2] \dots [n^2 - (n-2)^2]}{(2k+2)(2k+3) \dots (n-1)} \\ & \times \frac{1}{2^{n-2k-3}} \cdot \frac{1+k}{\frac{n-2}{2}-k} (n-1) \end{aligned} \right\}$$

Considérons la série entre parenthèses, et faisons $\frac{n}{2} = r$;
 elle pourra se mettre sous la forme

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{r-k-1}{1} \cdot \frac{r+k+1}{2k+3} \\ & + \frac{(r-k-1)(r-k-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(r+k+1)(r+k+2)}{(2k+3)(2k+4)} \\ & - \frac{(r-k-1)(r-k-2)(r-k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ & \times \frac{(r+k+1)(r+k+2)(r+k+3)}{(2k+3)(2k+4)(2k+5)} + \dots \end{aligned} \right.$$

La plus petite valeur que r peut recevoir pour une valeur donnée de k est évidemment $k+2$, parce que, pour arriver à P_k , il faut que le dernier indice de P dans la formule (A), c'est-à-dire $\frac{n-2}{2}$, soit au moins $= k$. Or, je dis que la série (1) est toujours égale à zéro. En effet, elle est un cas particulier de la série (a) du lemme, celui dans lequel on poserait

$\alpha = r - k - 1$, $\beta = r + k + 1$, $\delta = 2k + 3$, $\gamma = \varepsilon = x = 1$; de plus, on voit tout de suite qu'elle est nulle pour $r = k + 2$, et nulle aussi lorsqu'on augmente β , δ , γ , ε d'un nombre entier quelconque m ; on en conclut donc par le lemme qu'elle s'évanouira pour des valeurs quelconques entières de r et de k , pourvu que $r \geq k + 2$.

De cette manière, la première formule (A) est complètement démontrée.

Passons au cas de n impair.

En faisant la substitution de l'autre valeur de P_r dans le premier membre de l'équation (B), on en tirera pour le coefficient de A_{1+k} ,

$$\begin{aligned} & (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1}} \cdot \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots[(n^2-(2k-1)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2k)} \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{n^2-(2k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{1}{2} \frac{1+k}{1} (2k+3)_0 \\ & + \frac{[n^2-(2k+1)^2][n^2-(2k-3)^2]}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)} \\ & \times \frac{1}{2^3} (2k+5)_1 \cdot \frac{1+k}{2} + \dots \\ & + \frac{[n^2-(2k+1)^2][n^2-(2k+3)^2]\dots[(n^2-(n-2)^2]}{(2k+1)(2k+2)\dots(n-1)} \\ & \times \frac{1}{2^{n-2k-2}} \cdot \frac{1+k}{\frac{n-1}{2}-k} \cdot (n)_{\frac{n-3}{2}-k} \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Cette valeur n'est pas exacte pour $k = \frac{n-3}{2}$, et nous aurons, au lieu de celle-ci, pour la valeur du coefficient de $A_{\frac{n-1}{2}}$, la quantité suivante

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{n-3}{2}} \cdot \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2) \dots [n^2-(n-4)^2]}{1 \cdot 2 \cdot \dots (n-3)} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \\ & + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2) \dots [n^2-(n-2)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-1)} \\ & \times \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n-2}{1} \left(\frac{n-1}{2} \right), \end{aligned}$$

qui est évidemment zéro.

Prenons la série entre parenthèses du coefficient de A_{1+k} et mettons $\frac{n-1}{2} = r$; en réduisant, on verra qu'elle peut se présenter sous la forme

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{r-k}{1} \cdot \frac{r+k+1}{2k+3} \cdot \frac{2k+3}{2k+1} + \frac{(r-k)(r-k-1)}{1 \cdot 2} \\ & \times \frac{(r+k+1)(r+k+2)}{(2k+3)(2k+4)} \cdot \frac{(2k+3)(2k+5)}{(2k+1)(2k+3)} \\ & - \frac{(r-k)(r-k-1)(r-k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ & \times \frac{(r+k+1)(r+k+2)(r+k+3)}{(2k+3)(2k+4)(2k+5)} \\ & \times \frac{(2k+3)(2k+5)(2k+7)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} + \dots \end{aligned}$$

On déduit aussi cette série de celle du lemme en prenant

$$\begin{aligned} \alpha &= r-k, \quad \beta = r+k+1, \quad \gamma = \frac{2k+3}{2}, \\ \delta &= 2k+3, \quad \varepsilon = \frac{2k+1}{2}, \quad x = 1. \end{aligned}$$

La plus petite valeur de r est $k+2$, et l'on vérifie tout de suite que pour cette valeur la série se réduit à zéro, et

qu'elle reste égale à zéro en augmentant $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ d'un nombre entier m à volonté; par conséquent il en suit qu'elle s'évanouira toujours pour des nombres entiers quelconques r et k , pourvu que $r \geq k + 2$.

Ainsi est entièrement démontrée l'autre formule (B) pour le cas d'un polygone d'un nombre impair de côtés.

Quoique la démonstration précédente nous semble tout à fait rigoureuse, cependant nous croyons que M. Prouhet, qui a proposé cette question, y est parvenu par une voie plus simple (*), et il est à souhaiter qu'il fasse connaître la suite des raisonnements qui l'ont conduit à ces formules. Nous ferons observer, en terminant, que les équations (A) et (B) se vérifient immédiatement si le polygone est régulier. En effet, en désignant par Δ le côté du polygone donné, par Δ_1 le côté du premier polygone inscrit, par Δ_2 celui du second, etc., on aurait alors

$$\Delta_1 = \Delta \sin \frac{(n-2)\pi}{2n}, \quad \Delta_2 = \Delta_1 \sin \frac{(n-2)\pi}{2n} = \Delta \sin^2 \frac{(n-2)\pi}{2n},$$

$$\Delta_3 = \Delta \sin^3 \frac{(n-2)\pi}{2n}, \dots,$$

et les apothèmes seraient respectivement

$$\frac{1}{2} \Delta \operatorname{tang} \frac{(n-2)\pi}{2n}, \quad \frac{1}{2} \Delta \operatorname{tang} \frac{(n-2)\pi}{2n} \sin \frac{(n-2)\pi}{2n},$$

$$\frac{1}{2} \Delta \operatorname{tang} \frac{(n-2)\pi}{2n} \sin^2 \frac{(n-2)\pi}{2n}, \dots,$$

de manière qu'on aurait en général

$$P_p = \frac{1}{4} n \Delta^2 \cdot \operatorname{tang} \frac{(n-2)\pi}{2n} \sin^{2p} \frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

(*) La solution de M. Prouhet, que nous donnerons, est, en effet, plus simple. Cela ne diminue pas le mérite de l'habile emploi que M. Tardy a fait de l'importante série hypergéométrique. TM

En substituant dans les formules connues

$$\sin nx = n \sin x \cos x \left[1 - \frac{n^2 - 2^2}{2 \cdot 3} \sin^2 x + \frac{(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^4 x - \dots \right]$$

pour n pair, et

$$\cos nx = \cos x \left[1 - \frac{n^2 - 1^2}{2} \sin^2 x + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \dots \right]$$

pour n impair, et en prenant $x = \frac{(n-2)\pi}{2n}$, il est clair qu'il en résulterait les formules données par M. Prouhet.
