

DIEU

**Concours d'agrégation aux lycées,
année 1850**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 335-339

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__335_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1850 ;

PAR M. DIEU ,

Agrégé, docteur es sciences

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Première question. *Un point matériel pesant glisse sans frottement sur une courbe liée à un axe vertical autour duquel elle tourne uniformément ; on demande à quelle condition cette courbe doit être assujettie pour que le point glisse d'un mouvement uniforme.*

Seconde question. *Une droite sur laquelle un point matériel pesant glisse sans frottement, tourne uniformément autour d'un axe horizontal auquel elle est liée; déterminer le mouvement du point sur la droite.*

1°. Le mouvement du point sur la courbe tournant autour de l'axe est identique à celui qu'il aurait sur cette courbe rendue fixe, si on lui appliquait continuellement une force égale à la force centrifuge provenant de la rotation autour de l'axe; donc il s'agit de trouver la courbe pour laquelle la somme des composantes tangentielles de la force centrifuge et de la pesanteur est toujours nulle.

L'axe des z coïncidant avec l'axe vertical fixe et étant dirigé de bas en haut, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point à la fin du temps t , par ds l'élément correspondant de la courbe, et par ω la vitesse angulaire constante autour de l'axe des z , la composante tangentielle de la pesanteur est $-g \frac{dz}{ds}$, et celle de la force centrifuge est $\omega^2 \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right)$, car les composantes de cette force suivant les directions des axes sont $x\omega^2, y\omega^2$ et 0. Ainsi la courbe doit satisfaire à l'équation différentielle

$$g dz = \omega^2 (x dx + y dy),$$

dont l'intégrale est

$$z - C = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2),$$

qui représente un paraboloïde de révolution autour de l'axe fixe. Donc, la condition demandée est que :

La courbe engendre, en tournant autour de l'axe fixe, un paraboloïde dont la distance du foyer au sommet soit égale à $\frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2}$.

2°. La droite fixe étant prise pour axe des x , et le plan du cercle de gorge de l'hyperboloïde engendré par la droite mobile A, pour celui des $\widehat{yz}$; l'axe des z sera vertical et dirigé de bas en haut, celui des y horizontal et dirigé de manière que la rotation de A autour de l'axe des x s'effectue de celui des y vers celui des z . Cela posé, soient :

- ω la vitesse angulaire constante avec laquelle A tourne autour de l'axe des x ;
- r le rayon du cercle de gorge de l'hyperboloïde, égal à la plus courte distance de ces deux droites,
- a l' x d'un point B de A;
- R la distance de B à l'axe des x ;
- δ l'angle que la projection de R sur $\widehat{yz}$ fait avec l'axe des y quand $t = 0$;
- α l'angle constant que A fait avec l'axe des x , et, à la fin du temps t , β, γ les angles (variables) que A fait avec les deux autres axes de coordonnées;
- x, y, z les coordonnées du mobile, à la fin du temps t ;
- s la longueur (prise avec le même signe que x) de la partie de A comprise entre le plan $\widehat{yz}$ et le point (x, y, z) .

A la fin du temps t , qui sera compté à partir de l'instant où la droite A coupe O y , les coordonnées du point où elle perce $\widehat{yz}$ sont

$$0, \quad r \cos \omega t, \quad r \sin \omega t;$$

et celles de B sont

$$a, \quad R \cos (\delta + \omega t), \quad R \sin (\delta + \omega t);$$

donc

$$\cos \beta = \cos \alpha \cdot \frac{R \cos (\delta + \omega t) - r \cos \omega t}{a},$$

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \frac{R \sin (\delta + \omega t) - r \sin \omega t}{a},$$

et

$$y = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} x + r \cos \omega t, \quad z = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} x + r \sin \omega t.$$

D'ailleurs, en prenant convenablement le sens des x positives, on a

$$x = s \cos \alpha.$$

Les composantes parallèles aux axes de la force centrifuge sont, pour le point (x, y, z) ,

$$0, \quad \omega^2 y, \quad \omega^2 z;$$

donc la composante de cette force suivant la droite A est exprimée par

$$\omega^2 (\gamma \cos \beta + z \cos \gamma),$$

ce qui revient à

$$\omega^2 \left(s \cdot \sin^2 \alpha + r \cos \alpha \cdot \frac{R \cos \delta - r}{a} \right),$$

d'après les équations précédentes, et eu égard à ce que $\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \sin^2 \alpha$.

Enfin, la composante de la pesanteur g suivant la droite A est

$$-g \cos \alpha \cdot \frac{R \sin (\delta + \omega t) - r \sin \omega t}{a}.$$

D'après cela, l'équation du mouvement suivant la droite A est

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} - \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot s = & -g \cos \alpha \cdot \frac{R \sin (\delta + \omega t) - r \sin \omega t}{a} \\ & + r \omega^2 \cos \alpha \cdot \frac{R \cos \delta - r}{a}. \end{aligned}$$

On voit facilement que, C, C' désignant deux constantes arbitraires, l'intégrale de cette équation est

$$s = C e^{\omega t \sin \alpha} + C' e^{-\omega t \sin \alpha} \\ + g \cos \alpha \cdot \frac{R \sin(\delta + \omega t) - r \sin \omega t}{a \omega^2 (1 + \sin^2 \alpha)} + \frac{r \cos \alpha (R \cos \delta - r)}{a \sin^2 \alpha}$$

(e est la base des logarithmes népériens); et, par suite, on a, en désignant par ν la vitesse du mobile à la fin du temps t ,

$$\nu = \omega \sin \alpha \cdot (C e^{\omega t \sin \alpha} - C' e^{-\omega t \sin \alpha}) \\ + g \cos \alpha \cdot \frac{R \cos(\delta + \omega t) - r \cos \omega t}{a \omega (1 + \sin^2 \alpha)}.$$

Ces deux formules donneront les valeurs de s, ν , à un instant quelconque, quand on aura déterminé C, C' , d'après les valeurs initiales; elles feront par conséquent connaître le mouvement du point matériel sur la droite A , dont la position sera déterminée par les coordonnées du point où elle perce le plan $\widehat{yz}$, et les valeurs correspondantes de $\cos \alpha, \cos \beta$, ou, si l'on aime mieux, on calculera x, y, z au moyen des équations qui ont d'abord été posées.

Si $C \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$, le terme qui contient $e^{\omega t \sin \alpha}$, comme facteur, finira toujours par dominer dans les valeurs de s et de ν qui croîtront indéfiniment avec t .

Si $C = 0$, ce seront au contraire les termes contenant les lignes trigonométriques qui domineront à la longue, de sorte que le mouvement tendra à devenir oscillatoire.