

Note sur le théorème de Goldbach

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 326-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__326_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LE THÉORÈME DE GOLDBACH

voir p. 278

Le lecteur s'est sans doute aperçu que c'est par inadvertance qu'on a inséré la *prétendue* première démon-

tration de ce théorème (*). Il faut s'en tenir à celle d'Euler, qui a donné même une plus grande extension à ce théorème qu'il énonce ainsi, mais sans démonstration :

Tout nombre entier qui n'est pas compris dans la formule $4mn - m - n$ est nécessairement compris dans la formule $x^2 + y^2 + y$.

Et il en conclut que l'expression

$$4mn - m - n + x^2 + y^2 + y$$

renferme tous les nombres possibles. En effet, si le nombre est compris dans $4mn - m - n$, il suffit de faire $x = y = 0$; s'il est compris dans $x^2 + y^2 + y$, il faut faire $m = n = 0$, et, d'après le théorème, le nombre doit être compris dans l'une ou dans l'autre expression; il est facile d'ailleurs de démontrer que le même nombre ne peut être renfermé simultanément dans les deux expressions. En effet, on aurait

$$4mn - m - n = x^2 + y^2 + y;$$

on en tire

$$(4m - 1)(4n - 1) = 4x^2 + (2y + 1)^2;$$

équation impossible; la somme de deux carrés ne peut être divisible par un nombre de la forme $4n - 1$.

Goldbach ajoute qu'on peut ramener $4mn - m - n$ à la forme $y^2 + y - x^2$. En effet, on a

$$\begin{aligned} (4m - 1)(4n - 1) &= (2y + 1)^2 - 4x^2 \\ &= (2y + 2x + 1)(2y - 2x + 1); \end{aligned}$$

on fait

$$\begin{aligned} x &= m - n, \\ y &= m + n - 1; \end{aligned}$$

ainsi tout nombre entier est de la forme $y^2 + y \pm x^2$,

(*) L'équation $n'' = n$ m'a trompé. Il s'agit de $n - n''$; par conséquent, n s'annule, et avec n tout le raisonnement.

c'est-à-dire tout nombre est égal au double d'un nombre triangulaire plus ou moins un carré (le zéro non compris).

Observation. Ce qui précède est dans une Lettre de Goldbach à Euler, datée de Moscou le 7 juin (nouveau style) 1742; *Correspondance mathématique et physique*, tome I, page 125. Les démonstrations sont de M. Lebesgue.