

Théorème de M. Joachimsthal sur les lignes géodésiques des surfaces du second degré, à centre ; d'après M. le professeur Graves, à Dublin

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11 (1852), p. 322-323

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__322_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE M. JOACHIMSTHAL SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ, À CENTRE ;

D'APRÈS M. LE PROFESSEUR GRAVES, A DUBLIN.

(Journal de M. Crelle, t. XLII, p. 279; 1851; en anglais.)

1. *Lemme.* ACB est le chemin le plus court pour aller du point A au point B, en passant par le point C situé sur une droite, dans l'espace, lorsque AC et BC sont également inclinés sur cette droite.

2. *Lemme.* Deux tangentes menées, par le même point, à une surface du second degré à *centre*, sont proportionnelles aux demi-diamètres parallèles à ces tangentes.

3. *Lemme.* P et Q étant les points de contact de deux plans tangents à une surface du second degré à centre, la perpendiculaire abaissée de P sur le plan Q est à la perpendiculaire abaissée du centre sur le même plan Q, comme la perpendiculaire abaissée de Q sur le plan P est à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan P.

Démonstration. La proposition est évidente pour la sphère. Par la méthode *métamorphique*, on étend la proposition à une surface quelconque du second degré.

4. *Lemme.* P et Q étant les points de contact de deux plans tangents à une surface du second degré; L la droite

d'intersection de ces deux plans; S un point de cette droite tel, que PS et QS soient également inclinés sur L; les droites PS et QS sont proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents en P et en Q.

Démonstration. Les droites PS et QS sont évidemment proportionnelles aux perpendiculaires abaissées de P et de Q sur la droite L, et par conséquent aux perpendiculaires abaissées de P et de Q sur les plans tangents en Q et en P; donc (*lemme 3*) les droites PS et QS sont proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du centre sur les plans Q et P.

5. *Corollaire.* Les droites PS et QS sont des tangentes à la surface; donc (*lemme 2*) les demi-diamètres parallèles à PS et à QS sont proportionnels aux perpendiculaires abaissées de P et Q sur les plans P et Q; autrement, la perpendiculaire abaissée de P sur le plan Q, multipliée par le demi-diamètre parallèle à PS, est égale à la perpendiculaire abaissée de Q sur le plan P, multipliée par le demi-diamètre parallèle à QS.

Observation. Le chemin PSQ est le plus court pour aller de P à Q en touchant la droite L (*lemme 1*).

6. THÉORÈME DE JOACHIMSTHAL. *Soit un point P situé sur une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré à centre; menons en P la tangente à la courbe et le plan tangent à la surface; la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, multipliée par le demi-diamètre parallèle à la tangente, donne un produit constant.*

Démonstration. Soient P, S, Q trois points consécutifs sur la ligne géodésique. Ayant égard au corollaire et à l'observation qui précèdent, le théorème devient évident. (Voir *Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 22; 1846.)