

Théorèmes sur les aires des polygones et les volumes des polyèdres ; d'après M. Staudt

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11 (1852), p. 299-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__299_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEORÈMES SUR LES AIRES DES POLYGONES ET LES VOLUMES DES POLYÈDRES;

D'APRÈS M. STAUDT,
Professeur à Erlangen.

(Journal de M. Crelle, t. XXIV. p. 252; 1843.)

POLYGONE.

1. *Lemme.* Soit ABCD un quadrilatère plan; on a
 $2 \text{ AB. CD } \cos(\text{AB}, \text{CD}) = (\text{AB})^2 + (\text{BC})^2 - (\text{AC})^2 - (\text{BD})^2.$

2. THÉORÈME. MAB, NO₁O₂ étant deux triangles dans
 un même plan. Posant

MA, NO₁ cos(MA, NO₁) = a₁; MB, NO₂ cos(MB, NO₂) = b₂;
 on aura

$$4 \text{ MAB, NO}_1\text{O}_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

3. THÉORÈME. MAB, NO₁O₂ étant deux triangles si-
 tués dans des plans formant un angle φ, on aura

$$4 \text{ MAB, NO}_1\text{O}_2 \cos \varphi = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

a et b ayant même signification que ci-dessus.

4. THÉORÈME. Mêmes données. On a

$$\begin{aligned} 16 \text{ MAB, NO}_1\text{O}_2 \cos \varphi = & [(\text{MO}_1)^2 + (\text{AN})^2 - (\text{AO}_1)^2 - (\text{MN})^2] \\ & [(\text{MO}_2)^2 + (\text{BN})^2 - (\text{BO}_2)^2 - (\text{MN})^2] \\ & - [(\text{MO}_2)^2 + (\text{AN})^2 - (\text{AO}_2)^2 - (\text{MN})^2] \\ & [(\text{MO}_1)^2 + (\text{BN})^2 - (\text{BO}_1)^2 - (\text{MN})^2]. \end{aligned}$$

Démonstration. Le membre à gauche, d'après le théorème 3, est égal à $2 a_1 \cdot 2 b_2 - 2 a_2 \cdot 2 b_1$, et, d'après le lemme, cette dernière expression est égale au second membre de l'équation. Donc, etc.

En effectuant la multiplication, on obtient neuf termes positifs et neuf termes négatifs, formés des carrés des neuf distances des trois sommets d'un triangle aux trois sommets de l'autre. Ces termes se forment ainsi : 1^o chaque terme est le produit des carrés de deux de ces distances; 2^o le même sommet n'entre pas dans les deux facteurs; 3^o le signe du produit se détermine ainsi. Pour fixer les idées, prenons les côtés MA et NO₁, et supposons qu'on parcoure le premier triangle dans le sens MABM, et le second triangle dans le sens NO₁ O₂ N; le terme (MN)² (AO₁)² est positif, et le terme (MO₁)² (AN)² est négatif; dans le premier terme, on marche dans le même sens dans les deux triangles, savoir, de M vers A et de N vers O₁; pour le second terme, on marche en sens inverse de O₁ en N, et ainsi des autres.

5. Soient le triangle MAB et un polygone plan O₁ O₂ O₃ ... O_n, φ l'angle des deux plans, P l'aire du triangle, et Q l'aire du polygone. Décomposons le polygone en triangles, ayant pour sommet commun un point N pris dans l'intérieur du polygone; considérons les deux triangles consécutifs NO₁ O₂, NO₂ O₃; d'après le précédent théorème, le produit $16 P \cdot NO_1 O_2 \cos \varphi$ est égal à une somme de dix-huit termes, dont neuf sont positifs et dont neuf sont négatifs; et, de même, pour le produit $16 P \cdot NO_2 O_3 \cos \varphi$. Mais le terme (MN)² · (AO₂)² est positif pour le triangle NO₂ O₃, et négatif pour le triangle NO₁ O₂, car on marche dans le sens inverse; donc ces deux termes se détruisent. Il en est de même pour tous les termes où entre la lettre N. Il ne faut donc conserver que les termes provenant de la

comparaison des trois côtés du triangle avec les côtés successifs $O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, \dots$, etc.; chaque comparaison donne deux termes. On a donc en tout $6n$ termes.

6. THÉORÈME. Soient un polygone plan de m sommets, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, et un autre polygone plan de n sommets, $b_1, b_2, \dots, b_n$; φ l'angle de deux plans, et P et Q les aires respectives. $16 PQ \cos \varphi$ est égal à $2mn$ termes, mn avec le signe $+$, et mn avec le signe $-$; le côté $a_p a_{p+1}$ comparé au côté $b_q b_{q+1}$ donne ces deux termes $(a_p b_q)^2 (a_{p+1} b_{q+1})^2 - (a_p b_{q+1})^2 (a_{p+1} b_q)^2$.

Démonstration. Même raisonnement que dans le § 5.

7. Soit P l'aire d'un polygone plan de n sommets; appliquant le théorème précédent à deux polygones qui se confondent, on voit que $16 P^2$ renferme :

1°. n termes de la forme $-(a_r a_{r+1})^4$;

2°. n termes de la forme $2 (a_r a_{r+1})^2 (a_{r+1} a_{r+2})^2$, renfermant deux côtés consécutifs;

3°. $n(n-3)$ termes renfermant les côtés non consécutifs $a_r a_{r+1}, a_p a_{p+1}$.

Les termes positifs sont de la forme $2 (a_r a_p)^2 (a_{r+1} a_{p+1})^2$, et les termes négatifs de la forme $-2 (a_r a_{p+1})^2 (a_{r+1} a_p)^2$.

Exemple. $n = 3$; on a

$$16 P^2 = -m_1^4 - m_2^4 - m_3^4 + 2m_1 m_2 + 2m_1 m_3 + 2m_2 m_3,$$

où m_1, m_2, m_3 sont les côtés du triangle. Si $n = 4$, on a

$$16 P^2 = -m_1^4 - m_2^4 - m_3^4 - m_4^4 + 2m_1^2 m_2^2 + 2m_2^2 m_3^2 \\ + 2m_3^2 m_4^2 + 2m_4^2 m_1^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_4^2 + 2d^2 e^2;$$

m sont les côtés, d et e les deux diagonales. On a aussi

$$16 P^2 = (2de + m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2) \\ (2de + m_2^2 + m_4^2 - m_1^2 - m_3^2).$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 69.)

TÉTRAÈDRES.

8. Lemme. $MABC, NO_1O_2O_3$ sont deux tétraèdres

quelconques; posons

$$\text{MA} \cdot \text{NO}_r \cos (\text{MA}, \text{NO}_r) = a_r;$$

$$\text{MB} \cdot \text{NO}_r \cos (\text{MB}, \text{NO}_r) = b_r;$$

$$\text{MC} \cdot \text{NO}_r \cos (\text{MC}, \text{NO}_r) = c_r;$$

on a

$$(1) \left\{ \begin{aligned} 36 \text{ MABC} \cdot \text{NO}_1 \text{O}_2 \text{O}_3 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 \\ &+ (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2. \end{aligned} \right.$$

Démonstration. Considérons MC comme représentant une force en grandeur et en direction; décomposons cette force en trois autres: MV_3 , perpendiculaire au plan $\text{NO}_1 \text{O}_2$; MV_1 , perpendiculaire au plan $\text{NO}_2 \text{O}_3$; et MV_2 , perpendiculaire au plan $\text{NO}_1 \text{O}_3$; nous aurons

$$\text{MABC} = \text{MABV}_1 + \text{MABV}_2 + \text{MABV}_3.$$

(On obtient cette équation en décomposant la résultante MC et chacune de ses trois composantes, en deux autres forces, l'une située dans le plan MAB, et l'autre perpendiculaire à ce plan). Soit φ l'angle des deux faces MAB et $\text{NO}_1 \text{O}_2$, on a (2)

$$\text{MAB} \cdot \text{NO}_1 \text{O}_2 \cos \varphi = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{4}.$$

Nommons h_1 , h_2 les perpendiculaires abaissées respectivement de V_3 sur MAB, et de O_3 sur $\text{NO}_1 \text{O}_2$; nous avons

$$h_1 h_2 = c_3 \cos \varphi.$$

En effet, construisons le parallélipède des forces MV_1 , MV_2 , MV_3 ; on a h_1 égal à MV_3 multiplié par le sinus de l'inclinaison de MV_3 sur MAB; mais MV_3 est perpendiculaire sur $\text{NO}_1 \text{O}_2$; donc $h_1 = \text{MV}_3 \cos \varphi$; $h_2 = \text{NO}_3 \times \sin$ de l'inclinaison de NO_3 sur $\text{NO}_1 \text{O}_2$; désignons cette inclinaison par ψ ; donc $h_1 h_2 = \text{MV}_3 \cdot \text{NO}_3 \sin \psi \cos \varphi$; or ψ est égal à l'angle d'inclinaison de MV_3 sur la face du parallélipède fondée par MV_1 et MV_2 ; donc $\text{MV}_3 \sin \psi$ est la perpendiculaire abaissée de C sur cette face: mais cette

perpendiculaire est parallèle à NO_3 ; donc

$$\text{MV}_3 \sin \psi = \text{MC} \cos (\text{MC}, \text{NO}_3);$$

donc

$$h_1 h_2 = c_3 \cos \varphi;$$

d'où

$$36 \text{ NO}_1 \text{ O}_2 \text{ O}_3 . \text{MABV}_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3;$$

on démontre de même

$$36 \text{ NO}_1 \text{ O}_2 \text{ O}_3 . \text{MABV}_2 = (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2,$$

$$36 \text{ NO}_1 \text{ O}_2 \text{ O}_3 . \text{MABV}_1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1.$$

Ajoutant ces trois équations, on parvient à l'équation (1).

9. Dans un triangle sphérique, le produit du sinus d'une hauteur par le sinus de la base correspondante est constant; appelons ce produit le *sinus* de l'angle solide formé par les trois rayons qui aboutissent aux trois sommets du triangle; on a donc, d'après cette définition, le

volume de $\text{MABC} = \frac{1}{6} \text{MA} . \text{MB} . \text{MC} \sin \overline{\text{MABC}}$, ou

$\sin \overline{\text{MABC}}$ est le sinus de l'angle solide en M.

Faisant

$$\cos (\text{MA}, \text{NO}_r) = \alpha_r; \quad \cos (\text{MB}, \text{NO}_r) = \beta_r; \quad \cos (\text{MC}, \text{NO}_r) = \gamma_r,$$

l'équation (1) donne

$$\begin{aligned} \sin \overline{\text{MABC}} \sin \overline{\text{NO}_1 \text{ O}_2 \text{ O}_3} = & (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \gamma_3 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \gamma_1 \\ & + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \gamma_2 \end{aligned}$$

On en déduit aussi ce théorème : *La distance du centre de gravité d'un tétraèdre à un des sommets divisé par le sinus de l'angle solide formé par les trois autres distances, donne un quotient constant.*

On sait que les quatre distances dont il s'agit, étant considérées comme quatre forces données en grandeur et en direction, le système est en équilibre, les forces agissant du centre de gravité vers les sommets. On a donc ici un beau théorème de statique.

10. En multipliant les deux membres de l'équation (1) par 8, et remplaçant $2a_1, 2b_1, 2c_1$, etc., par leurs valeurs (*lemme*), on trouve, pour les termes se rapportant aux faces ABC et $O_1O_2O_3$, les six termes suivants :

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} (AO_1)^2(BO_2)^2(CO_3)^2 + (AO_1)^2(BO_1)^2(CO_3)^2 \\ + (AO_3)^2(BO_2)^2(CO_1)^2 - (AO_1)^2(BO_1)^2(CO_3)^2 \\ + (AO_2)^2(BO_3)^2(CO_1)^2 - (AO_3)^2(BO_1)^2(CO_2)^2. \end{array} \right.$$

La comparaison de toutes les faces, deux à deux, donne cinquante-quatre termes analogues, dont vingt-sept positifs et autant de négatifs.

11. Si l'on représente par a, b, c les arêtes qui partent d'un sommet d'un tétraèdre, par a', b', c' les côtés opposés, et par P le volume du tétraèdre, on a, les deux tétraèdres du lemme 8 se réunissant.

$$\begin{aligned} 144 P^2 = & a^2 a'^2 (b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2) \\ & + b^2 b'^2 (a^2 + a'^2 + c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2) \\ & + c^2 c'^2 (a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2) \\ & - a'^2 b'^2 c'^2 - a^2 b^2 c^2 - a^2 b'^2 c^2 - a'^2 b^2 c^2. \end{aligned}$$

12. Soient P le volume d'un polyèdre formé par m triangles, Q le volume d'un polyèdre formé par n triangles, le produit 288 PQ sera égal à la somme de mn expressions de six termes chacune et de la forme indiquée 10 (A); $3mn$ termes positifs et $3mn$ négatifs; c'est une conséquence du théorème 8.

13. THÉORÈME GÉNÉRAL. *Le produit des volumes de deux polyèdres est une fonction algébrique entière des carrés des distances des sommets d'un polyèdre aux sommets de l'autre polyèdre.*

Ce théorème se démontre facilement à l'aide du théorème précédent, par un raisonnement analogue à celui qui établit le théorème 6.