

A. FRANCK

Solution de la question 47 (voir t. IV, p. 319)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 287-290

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__287_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

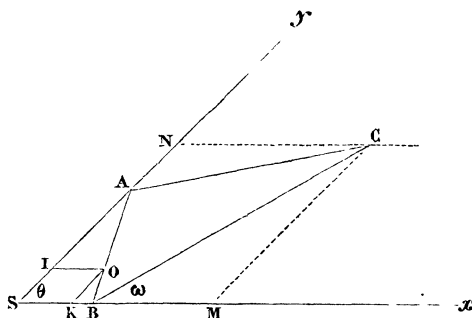
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 47

(voir t. IV, p. 319),

PAR M. A. FRANCK, ÉLÈVE,
Institution Coutant.

Par un point O donné dans un angle ASB , on mène une sécante AB terminée aux côtés de l'angle. Sur AB on construit un triangle ABC semblable à un triangle donné. On demande le lieu du sommet C .



Solution. Prenons pour axes des x et des y les côtés SB et SA de l'angle ; soient

x et y l'abscisse et l'ordonnée de C ,

p et q l'abscisse et l'ordonnée de O ,

N et M les pieds de l'ordonnée et de l'abscisse de C ,

K et I les points correspondants des coordonnées de O .

Désignons de plus par $m \sin A$, $m \sin B$, $m \sin C$ les côtés du triangle ABC respectivement opposés aux angles A , B et C ; par θ l'angle des axes, et par ω l'angle CBM du côté CB avec l'axe des x .

En considérant successivement les quatre triangles

CMB, CNA, OKB et OIA, nous aurons les relations

$$y = \frac{m \sin A \sin \omega}{\sin \theta}, \quad x = \frac{m \sin B (\theta + C - \omega)}{\sin \theta},$$

$$OB = \frac{q \sin \theta}{\sin (B + \omega)}, \quad OA = \frac{p \sin \theta}{\sin (B + \omega - \theta)}.$$

Ajoutant les valeurs de OB et de OA, il viendra

$$OB + OA = m \sin C = \frac{\sin \theta [q \sin (B - \theta + \omega) + p \sin (B + \omega)]}{\sin (B + \omega) \sin (B + \omega - \theta)}.$$

Si nous divisons entre elles, membre à membre, les équations donnant les valeurs de x et de y en fonction de ω , nous aurons

$$(1) \quad y \sin B \sin (\theta + C - \omega) = x \sin A \sin \omega.$$

Multiplions membre à membre les équations qui donnent y et $m \sin C$; remplaçant x par sa valeur, nous aurons une seconde équation ne contenant plus que des lignes trigonométriques de l'angle ω , et qui est

$$(2) \quad = y \sin C \sin (B + \omega) \sin (B - \theta + \omega) \\ = \sin A \sin \omega [q \sin (B - \theta + \omega) + p \sin (B + \omega)].$$

Il s'agit maintenant de tirer des équations (1) et (2) une relation entre x et y , indépendante de l'angle ω . Pour cela développons ces équations, en posant pour plus de simplicité $\theta + C = \varphi$ et $B - \theta = \psi$; nous aurons ainsi les deux équations

$$y \sin B (\sin \varphi \cos \omega - \cos \varphi \sin \omega) = x \sin A \sin \omega, \\ y \sin C (\sin B \cos \omega + \cos B \sin \omega) (\sin \psi \cos \omega + \cos \psi \sin \omega) \\ = \sin A \sin \omega [q (\sin \psi \cos \omega + \sin \omega \cos \psi) \\ + p (\sin B \cos \omega + \cos B \sin \omega)].$$

Divisons les deux membres de la première par $\sin \omega$, et les deux membres de la seconde par $\sin^2 \omega$; les deux dernières équations se transformeront ainsi dans les deux

suivantes , ne contenant plus que $\cotang \omega$:

$$\begin{aligned} \gamma \sin B (\sin \psi \cotang \omega - \cos \varphi) &= x \sin A, \\ \gamma \sin C (\sin B \cotang \omega + \cos B) (\sin \psi \cotang \omega + \cos \psi) \\ &= \sin A [q (\sin \psi \cotang \omega + \cos \psi) + p (\sin B \cotang \omega + \cos B)]; \end{aligned}$$

ou, ordonnant par rapport à $\cotang \omega$,

$$\gamma \sin B \sin \varphi \cotang \omega = x \sin A + \gamma \sin B \cos \varphi$$

et

$$\begin{aligned} &\gamma \sin C \sin B \sin \psi \cotang^2 \omega \\ &+ [\gamma \sin C \sin (\psi + B) - \sin A (q \sin \psi + p \sin B)] \cotang \omega \\ &+ \gamma \sin C \cos B \cos \psi - q \sin A \cos \psi - p \sin A \cos B = 0. \end{aligned}$$

Éliminant $\cotang \omega$, nous aurons, en ordonnant par rapport à γ et x , une équation qui représente une courbe du second degré passant par l'origine, et qui a évidemment des branches infinies. Les coefficients de γ et de x contiennent seuls p et q , et ces deux quantités se trouvent l'une ou l'autre à tous les termes. Si donc on change p en mp et q en mq , c'est-à-dire si l'on transporte le point O en un autre point de la ligne SO , l'équation de la nouvelle courbe ne différera de la première que par un facteur constant multipliant les coefficients de x et de γ . Ce facteur sera évidemment le rapport de similitude des deux courbes par rapport à l'origine.

Note. Les côtes AC , BC du triangle ABC sont chacun l'enveloppe d'une parabole; SA est une tangente à la parabole enveloppe de AC , et SB la tangente à la parabole enveloppe de BC ; le point O est le foyer commun; de sorte que le lieu géométrique fournit une belle propriété de deux paraboles unifocales. Le foyer commun étant un centre d'homologie, point qui reste tel en projection, on déduit une propriété générale relativement à un centre d'homologie de deux coniques quelconques. Nous devons à l'obligeance de M. Chasles cette intéressante observation. L'équation du lieu peut se mettre sous cette forme symétrique,

$$\begin{aligned} &\gamma^2 \sin B \sin C \sin (A - \theta) + x\gamma \sin C [\sin A \sin B + \sin (A - \theta) \sin (B - \theta)] \\ &+ x^2 \sin A \sin C \sin (B - \theta) - \gamma \sin B \sin (C + \theta) [p \sin (A - \theta) + q \sin A] \\ &\quad - x \sin A \sin (C + \theta) [p \sin B + q \sin (B - \theta)] = 0. \end{aligned}$$

On obtient cette forme, en développant $\sin (B + \psi)$, et remplaçant φ et ψ

par leurs valeurs ; d'où l'on tire

$$\begin{aligned} m &= \sin^2 C \sin^2 \theta \sin^2 (C + \theta), \\ k' &= \sin B \sin C \sin^2 (C + \theta) \sin \theta [q \sin A - p \sin (A - \theta)], \\ k &= \sin A \sin C \sin^2 (C + \theta) \sin \theta [p \sin B - q \sin (B - \theta)]. \end{aligned}$$

Donc : 1° le lieu est une hyperbole ; 2° les coordonnées du centre sont $\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}$; 3° les asymptotes font avec l'axe des x des angles égaux à $\theta - B$ et à A , ainsi l'angle des asymptotes est $\theta + C$ ou $\theta + C - 27$; 4° une construction géométrique donne les intersections des axes coordonnés avec la courbe ; et comme cette courbe passe par l'origine, on a donc trois points de la courbe et les directions des asymptotes, données suffisantes pour trouver géométriquement les axes principaux (*).
