

JAUFROID

Analyse indéterminée du premier degré

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 158-162

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__158_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ;

PAR M. JAUFROID,

Professeur de mathématiques au collège de Cette.

1. Le but de cet article est de traiter généralement la résolution en nombres entiers d'une équation du premier degré à un nombre quelconque d'inconnues.

Nous supposons démontré que l'équation

$$ax + by + c = 0,$$

a et b étant premiers entre eux, a toutes ses solutions en nombres entiers contenues dans les formules

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at,$$

α et β étant une de ces solutions.

II. Soit l'équation

$$ax + by + cz + dv + \dots + mu + n = 0,$$

$a, b, c, d, \dots, m$ n'ont pas de diviseur commun; soient, de plus, a et b premiers entre eux, je pose

$$(1) \quad \begin{cases} x = Az + Bv + \dots + Lu + M, \\ y = A_1z + B_1v + \dots + L_1u + M_1, \end{cases}$$

et je dis qu'on peut trouver, pour $A, B, \dots, L, M, A_1, B_1, \dots, L_1, M_1$, des nombres entiers tels, que les valeurs des équations (1) satisfassent à l'équation proposée, indépendamment de toutes valeurs données à $z, v, \dots, u$. En effet, la substitution donne

$$\begin{aligned} & (aA + bA_1 + c)z + (aB + bB_1 + d)v + \dots \\ & + (aL + bL_1 + m)u + aM + bM_1 + n = 0, \end{aligned}$$

ce qui exige qu'on ait séparément

$$\begin{aligned} aA + bA_1 + c &= 0, & aB + bB_1 + d &= 0, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ aL + bL_1 + m &= 0, & aM + bM_1 + n &= 0; \end{aligned}$$

mais a et b étant premiers entre eux, toutes ces équations sont solubles en nombres entiers. Concevons qu'on prenne une solution de chacune de ces équations, et que $A, B, \dots, L, M, A_1, B_1, \dots, L_1, M_1$ représentent les valeurs choisies, on aura l'identité suivante :

$$\begin{aligned} & a(Az + Bv + \dots + Lu + M) \\ & + b(A_1z + B_1v + \dots + L_1u + M_1) \\ & + cz + dv + \dots + mu + n = 0. \end{aligned}$$

Par suite, l'équation proposée se met sous la forme

$$\begin{aligned} & a(x - Az - Bv - \dots - Lu - M) \\ & + b(y - A_1z - B_1v - \dots - L_1u - M_1) = 0; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} x &= Az + Bv + \dots + Lu + M - bt, \\ y &= A_1z + B_1v + \dots + L_1u + M_1 + at, \end{aligned}$$

formules analogues à celles qu'on obtient pour le cas de deux inconnues, car on peut dire que les fonctions

$$x = A z + B v + \dots + L u + M,$$

$$y = A_1 z + B_1 v + \dots + L_1 u + M_1,$$

sont une solution de l'équation proposée.

III. Supposons que a et b aient un plus grand commun diviseur δ , mais qu'ils soient premiers avec un des autres coefficients, c par exemple. Je pose

$$a = a_1 \delta, \quad b = b_1 \delta, \quad \text{et} \quad ax + by = \delta p;$$

d'où

$$(1) \quad a_1 x + b_1 y = p.$$

L'équation proposée devient

$$\delta p + cz + dv + \dots + mu + n = 0,$$

δ et c sont premiers entre eux; donc, d'après le § II, on aura

$$z = B_2 v + \dots + L_2 u + M_2 + \delta t,$$

$$p = B_3 v + \dots + L_3 u + M_3 - ct;$$

l'équation (1) devient alors

$$a_1 x + b_1 y - B_3 v - \dots - L_3 u + ct - M_3 = 0;$$

et, comme a_1 et b_1 sont premiers entre eux, elle donne

$$(2) \quad \begin{cases} x = B v + \dots + L u + M t + N - b_1 t', \\ y = B_1 v + \dots + L_1 u + M_1 t + N_1 + a_1 t', \\ z = B_2 v + \dots + L_2 u + M_2 + \delta t. \end{cases}$$

Remarque. Si $\delta = 1$, on doit retomber sur le cas précédent; en effet, on peut résoudre par rapport à t la formule qui se rapporte à z , et porter cette valeur, qui est sous forme entière, dans celles de x et de y , qui prennent alors la forme indiquée précédemment. Les formules (2) comprennent donc les formules (1) du paragraphe précédent.

IV. Considérons encore le cas où a, b, c ont un plus grand commun diviseur δ , mais sont premiers avec d par exemple. Je pose

$$a = a_1 \delta, \quad b = b_1 \delta, \quad c = c_1 \delta \quad \text{et} \quad ax + by + cz = \delta p.$$

Or

$$(1) \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z = p;$$

l'équation proposée devient

$$\delta p + dv + er + \dots + mu + n = 0.$$

δ et d sont premiers entre eux, par conséquent on a

$$v = C_3 r + \dots + L_3 u + M_3 + \delta t,$$

$$p = C_4 r + \dots + L_4 u + M_4 - dt;$$

alors l'équation (1) devient

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z - \dots - L_4 u + dt - M_4 = 0,$$

et comme c_1 est premier avec a_1 et b_1 , cette dernière équation tombe dans le cas précédent, et, en appelant δ' le plus grand commun diviseur de a_1 et b_1 , elle donne, en posant $a_1 = a_2 \delta', \quad b_1 = b_2 \delta',$

$$x = C r + \dots + L u + M t + N t' + P - b_2 t'',$$

$$y = C_1 r + \dots + L_1 u + M_1 t + N_1 t' + P_1 + a_2 t'',$$

$$z = C_2 r + \dots + L_2 u + M_2 t + \delta' t',$$

$$v = C_3 r + \dots + L_3 u + M_3 t + \delta t.$$

Remarque. Si $\delta = 1$, les formules rentrent dans celles du § III. Si $\delta = 1, \delta' = 1$, elles rentrent dans celles du § II.

La marche du calcul est maintenant évidente, et l'on en déduit la généralisation suivante :

Si l'on choisit n inconnues dont les coefficients aient un plus grand commun diviseur δ , mais premiers avec le coefficient d'une des inconnues restantes, ces $n + 1$ inconnues s'expriment à l'aide de toutes les autres et de n indéterminées; l'inconnue, dont le coefficient est pre-

mier avec ceux des n autres, ne contient qu'une de ces indéterminées multipliée par δ . Le nombre des indéterminées augmente d'une unité d'une formule à une autre, jusqu'aux deux dernières qui les contiennent toutes.

On pourra, si quelques-unes des quantités δ' , etc., étaient égales à l'unité, diminuer si on le veut le nombre des formules d'après ce qui a été remarqué §§ III et IV.

Si l'on considère un système de valeurs pour $z, v, \dots, u$, les valeurs correspondantes de x et de y forment deux progressions arithmétiques ayant pour raisons les quotients des coefficients de y et de x par leur plus grand commun diviseur.

Si l'on considère un système de valeurs pour $v, \dots, u$, et si l'on divise a et b par le plus grand commun diviseur de a, b, c , ce qui donne a_1 et b_1 , les valeurs de z correspondantes forment une progression arithmétique ayant pour raison le plus grand commun diviseur de a_1 et b_1 , et ainsi de suite.

On conclut facilement de la théorie précédente, que si tous les coefficients, à l'exception de celui d'une seule inconnue, ont un plus grand commun diviseur δ , mais sont premiers avec celui de cette inconnue, les valeurs de celle-ci forment une progression arithmétique ayant pour raison δ .

Note. Ce problème, étendu à un nombre quelconque d'équations du premier degré, est traité avec rigueur et élégance dans un Mémoire inédit de M. Lebesgue, sur l'analyse indéterminée du premier degré, que le célèbre arithmologue a bien voulu nous communiquer. Ce Mémoire fait partie d'une Théorie générale des nombres.

La nature de cet ouvrage demanderait une souscription à laquelle le Gouvernement devrait prendre une forte part. Les encouragements sont à réserver pour les auteurs d'élite qui s'adressent à un petit nombre de lecteurs et pour lesquels il faut pourtant écrire, nonobstant les préoccupations du jour; c'est l'opinion de Vitruve :

Cum animadvertissem distentam civitatem publicis et privatis negotiis, paucis judicavi scribendum (in præfatione libri quinti de *Architectura*).