E. LIONNET

Note sur la division abrégée

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 148-154

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__148_1>

NOTE SUR LA DIVISION ABRÉGÉE;

Par M. E. LIONNET (*),
Professeur au lycée Louis-le-Grand.

1. *Trouver un ou plusieurs chiffres du quotient d'une division dans laquelle le dividende et le diviseur, entiers ou décimaux, contiennent un nombre de chiffres limité ou illimité.*

Fourier a résolu ce problème d'une manière ingénieuse en donnant, sans démonstration, une règle que nous allons reproduire succinctement, et avec une modification qui a pour objet d'en faire disparaître une inexactitude.

Faisant abstraction de la virgule dans les nombres proposés, on marque un ou plusieurs chiffres sur la gauche du diviseur, et l'on convient d'appeler diviseur désigné *le nombre formé par ces chiffres. On divise le dividende par le diviseur désigné, en observant la même*

(*) Par une méthode *empirique*, M. Koralek trouve que le problème de M. Lionnet (p. 115) n'a que quatre-vingt-douze solutions, dont douze seulement sont *distinctes*.

règle que pour la division ordinaire des nombres entiers. Toutefois, avant d'employer un dividende partiel, on lui fait subir une correction qui consiste à le diminuer de la somme des produits qu'on obtient en multipliant le premier des chiffres placés à la droite du diviseur désigné par le dernier des chiffres obtenus au quotient, le second par l'avant-dernier, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé comme multiplicateur le premier chiffre du quotient. Pour qu'un chiffre mis au quotient soit bon, il suffit que le reste correspondant soit au moins égal à la somme de tous les chiffres obtenus au quotient. Lorsque cette condition n'est pas remplie, le chiffre du quotient étant douteux, on le supprime avec le reste correspondant; on marque un chiffre de plus au diviseur désigné, et l'on abaisse à la droite du dernier dividende partiel corrigé le premier des chiffres non encore employés au dividende proposé, ce qui donne un nouveau dividende partiel auquel on fait subir la correction indiquée plus haut, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu au quotient le nombre de chiffres demandé.

246,83579246...	$\overline{97}$,5386457...
194	2,53
52,8	
1,0	
51,8	
48,5	
3,33	
0,31	
3,02	
2,91	
0,11	

Pour fixer les idées et simplifier la démonstration de cette règle, nous supposerons que le diviseur est un nombre décimal dont la partie entière 97 forme le *diviseur désigné,* que le dividende est un nombre décimal dont la partie entière 246 contient le diviseur désigné au moins une fois et moins de dix fois, et nous mettrons en évidence les produits qui doivent être retranchés successivement du dividende. Enfin, nous supposerons qu'en observant la règle précédente, on ait obtenu les trois premiers chiffres du quotient qui, dans l'exemple proposé, sera 2,53.... On voit alors qu'il suffira de démontrer que 2,53 est le plus grand multiple de 0,01 contenu dans le quotient, ou, autrement, que le produit du diviseur proposé d par 2,53 est contenu dans le dividende proposé D, et que le produit $d \times 2,54$ excède D.

Démonstration. Pour obtenir le reste 0,11 par la règle précédente, on a retranché de D :

1°. Le produit $97,53 \times 2$, en négligeant le produit

$$0,008\ldots \times 2 < 0,02;$$

2°. Le produit $97,5 \times 0,5$, en négligeant le produit

$$0,038\ldots \times 0,5 < 0,05;$$

3°. Le produit $97 \times 0,03$, en négligeant le produit

$$0,53\ldots \times 0,03 < 0,03.$$

Donc, en désignant par P la somme des produits ainsi retranchés de D, on aura

$$D = P + 0,1157\ldots, \quad d \times 2,53 > P$$

et

$$d \times 2,53 < P + (0,02 + 0,05 + 0,03).$$

Mais on a, par hypothèse,

$$2 + 5 + 3 = \text{ ou } < 11,$$

ou, autrement,

$$0,02 + 0,05 + 0,03 < 0,11;$$

donc $d \times 2,53$ est contenu dans D. De plus, le produit

$$d \times 2,54 = d \times 2,53 + d \times 0,01;$$

or

$$d \times 2{,}53 > \mathrm{P}, \quad d \times 0{,}01 = 0{,}97\ldots > 0{,}1157\ldots,$$

puisque le diviseur désigné 97 excède le reste 11 de la dernière division partielle ; donc enfin le produit $d \times 2{,}54$ excède D.

Remarque. La démonstration précédente s'applique au cas particulier où l'un des restes est moindre que la somme des chiffres du quotient qui lui correspond. Alors on suppose que le dernier diviseur désigné est la partie entière du diviseur d.

II. On voit, par ce qui précède, qu'étant donnés deux nombres entiers ou décimaux contenant un nombre limité ou illimité de chiffres, on pourra toujours trouver le quotient de leur division avec autant de chiffres exacts qu'on voudra, sans avoir égard à la virgule dans aucun des nombres proposés. Il suffira, dans chaque cas particulier, de commencer par déterminer l'ordre des plus grandes unités du quotient ; ensuite on multipliera ou l'on divisera le nombre entier obtenu par une puissance de 10, telle que le premier chiffre significatif à gauche exprime des unités de cet ordre. Mais, dans un grand nombre d'applications, on a besoin de connaître, à moins d'une unité entière ou décimale d'un ordre déterminé, une valeur approchée du quotient d'une division dans laquelle on ne donne que le premier chiffre à gauche du dividende et du diviseur, ou seulement l'ordre des unités exprimées par ces deux chiffres ; alors il importe de savoir combien il suffit de calculer de chiffres exacts au dividende et au diviseur, pour qu'en leur appliquant la règle précédente, on obtienne le quotient avec le degré d'approximation demandé. Mais, avant de résoudre ce problème, nous démontrerons le principe suivant : *Pour obtenir, à moins d'une unité, le quotient d'une division dans laquelle la partie entière du* *diviseur excède celle du quotient, il suffit de diviser la partie entière du dividende par celle du diviseur.*

Soient $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$ le dividende, le diviseur et le quotient dont a, b, c désignent les parties entières. Il s'agit de prouver que la partie entière du quotient $a : b$ est égale à c ou à $c + 1$.

1°. La partie entière du quotient $a : b$ est au moins égale à c; car elle est la même que celle du quotient $a + \alpha : b$, lequel excède $c + \gamma$;

2°. La partie entière du quotient $a : b$ n'excède pas $c + 1$; car s'il en était ainsi, elle serait au moins égale à $c + 2$, et l'on aurait

$$a = \text{ou} > b \times (c + 2),$$

et, par suite,

$$a + \alpha > b \times (c + 1) + b.$$

Mais, par hypothèse, le nombre b est au moins égal à $c + 1$, et, par conséquent, plus grand que $(c + 1) \times \beta$; donc, en remplaçant b par $(c + 1) \times \beta$, on aurait, à plus forte raison,

$$a + \alpha > (c + 1) \times (b + \beta),$$

d'où il résulterait, contrairement à la supposition, que la partie entière du quotient $a + \alpha : b + \beta$ serait au moins égale à $c + 1$; donc la partie entière du quotient $a : b$ ne peut excéder $c + 1$.

III. Soit proposé de trouver, à moins de 0,01, le quotient $\pi : e$ de la division du rapport de la circonférence au diamètre, par la base des logarithmes népériens. La longueur de la circonférence étant comprise entre les périmètres de l'hexagone régulier inscrit et du carré circonscrit, on reconnaît immédiatement que la partie entière de π est égale à 3; le nombre e étant la limite de la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \ldots,$$

on voit de même que la partie entière de e est égale à 2. De plus, pour trouver le quotient $\pi : e$ à moins de 0,01, il suffit de chercher le quotient $100\,\pi : e$ à moins d'une unité, puis de diviser ce dernier quotient par 100. Or le dividende $100\,\pi$ est compris entre 300 et 400, le diviseur e entre 2 et 3, et, par suite, le quotient entre 100 et 200; donc, si l'on multiplie le dividende et le diviseur par 100, on sera conduit à chercher une valeur approchée, à moins d'une unité, du quotient $10000\,\pi : 100\,e$ dans lequel la partie entière du diviseur excède celle du quotient. On voit qu'il suffira de calculer les quatre premières décimales de π, les deux premières de e, puis de diviser la partie entière 31415 de $10000\,\pi$ par la partie entière 271 de $100\,e$, ce qui donne 115 :

31415	271
43	115
160	
25	

Enfin, divisant 115 par 100, on obtient le quotient demandé 1,15.

En général, *pour trouver, à moins d'une unité entière ou décimale, le quotient d'une division dans laquelle on donne les premiers chiffres à gauche du dividende et du diviseur, ou seulement l'ordre des unités exprimées par ces deux chiffres, on commence par multiplier le dividende ou le diviseur par une puissance de* 10, *telle que la question soit ramenée à trouver un quotient, à moins d'une unité; ensuite on détermine le premier chiffre à gauche du quotient ou seulement l'ordre de ses plus grandes unités, et l'on multiplie ou l'on divise le dividende et le diviseur par une même puissance de* 10, *telle que la partie entière du nouveau diviseur excède le moins possible celle du quotient; on calcule alors les chiffres qui* *forment la partie entière du dividende et celle du diviseur, puis on divise la partie entière du dividende par celle du diviseur, ce qui donne un nombre entier qu'on multiplie ou qu'on divise par la puissance de* 10, *par laquelle on a d'abord multiplié le diviseur ou le dividende proposé.*