

MOURGUES

Note sur les sommes de puissances semblables

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 78-80

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__78_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES SOMMES DE PUISSANCES SEMBLABLES;

PAR M. MOURGUES,

Professeur à Marseille.

Soit P_n la somme des combinaisons n à n de m quantités $a, b, c \dots h$; soit A_n la partie de ces combinaisons qui ne contient pas a , B_n celle qui ne contient pas $b \dots$

On sait d'abord que

$$(1) \quad P_n = A_n + a A_{n-1}.$$

Je dis en second lieu que

$$(2) \quad A_n + B_n + C_n \dots + H_n = (m - n)P_n;$$

(*) On abrège beaucoup en faisant $AB = m$, $BA' = n$, $A'B' = p$, et écrivant $n(m + n + p) = mp$, $A\alpha = \frac{1}{2}(m + n)$, $A\beta = \frac{1}{2}(n + p)$.

car une combinaison quelconque $abc\dots e$ n'entre pas dans les n parties $A_n, B_n, \dots, E_n$, et entre une seule fois dans chacune des $m - n$ autres.

Cela posé, de la formule (1) on déduit

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_n = A_n + a A_{n-1}, \\ P_{n-1} = A_{n-1} + a A_{n-2}, \\ \vdots \\ P_1 = A_1 + a. \end{array} \right.$$

Multipliant les membres de la première équation par $(-a)$, de la deuxième par $(+a^2)$, de la troisième par $(-a^3)$, etc., et sommant, il vient

$$(4) \quad P_n - a P_{n-1} + a^2 P_{n-2} \dots \pm a^{n-1} P_1 \mp a^n = A_n.$$

De même

$$P_n - b P_{n-1} + b^2 P_{n-2} \dots \pm b^{n-1} P_1 \mp b^n = B_n;$$

d'où, par addition,

$$m P_n - S_1 P_{n-1} + S_2 P_{n-2} \dots \pm S_{n-1} P_1 \mp S_n = A_n + B_n \dots + H_n,$$

et, par suite, en vertu de l'équation (2),

$$(5) \quad n P_n - S_1 P_{n-1} + S_2 P_{n-2} \dots \mp S_{n-1} P_1 \pm S_n = 0.$$

C'est la formule qui donne, en fonction des combinaisons, les sommes de puissances semblables d'indices inférieurs à m .

En second lieu, pour $n = m$, la première des relations (3) se réduit à $P_m = a A_{m-1}$, et, par suite, l'égalité (4) devient

$$P_m - a P_{m-1} + a^2 P_{m-2} \dots \mp a^{m-1} P_1 \mp a^m = 0;$$

d'où, en multipliant les deux membres par a^r ,

$$a^r P_m - a^{r+1} P_{m-1} + a^{r+2} P_{m-2} \dots \pm a^{r+m-1} P_1 \mp a^{r+m} = 0.$$

Remplaçant a successivement par $b, c, \dots$, et sommant.

on a

$$(6) \quad S_r P_m - S_{r+1} P_{m-1} \dots \pm S_{r+m-1} P_1 \mp S_{m+r} = 0.$$

C'est la formule relative aux sommes d'indices non inférieurs à m .
